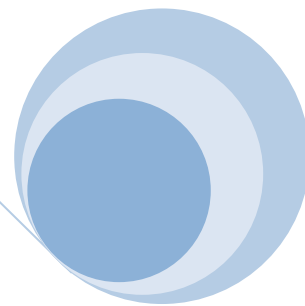
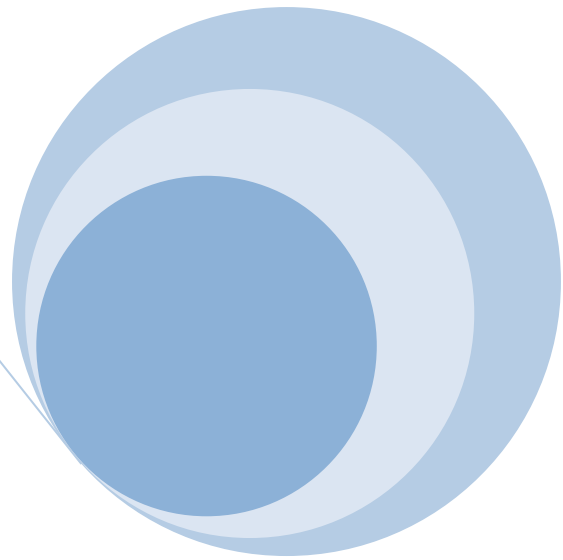
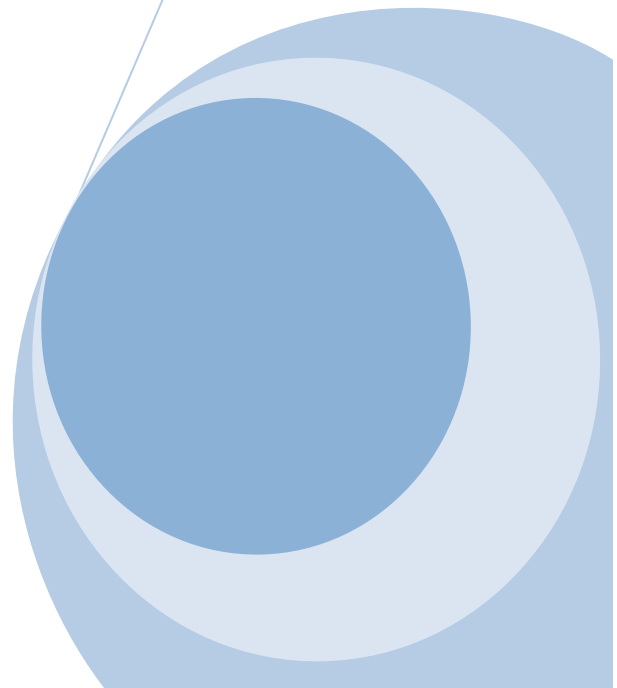


TREBALL FINAL DE MASTER



**ARTICULAR EL DESENVOLUPAMENT DE
LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA AMB LA
RESOLUCIÓ DE PROBLEMES**
ESPECIALITAT DE MATEMÀTIQUES

Sergi Sorribas Jiménez
Mentor de Centre: Jordi Comellas
Tutor de la UPF: Mireia López Beltrán
13/05/2012



ÍNDIX

1. Presentació general del treball	5
2. El currículum i la resolució de problemes	7
2.1 L'aprenentatge per competències	7
2.2 La competència matemàtica	7
2.3 La resolució de problemes com a procés per la construcció de la competència matemàtica	9
2.4 La influència de la metodologia i el professor	9
2.5 La teoria constructivista i la resolució de problemes.....	10
3. Aspectes tècnics del treball de camp.....	13
3.1 Els problemes.....	13
Problema 1: com ens repartim els diners.....	13
Problema 2: dos daus i treure un doble sis	14
Problema 3: la bola blanca.....	14
Problema 4: els aniversaris	14
Problema 5: tres daus, dos que siguin diferents	15
4. Treball de camp	17
4.1 Episodi 1: tres daus dos que siguin diferents.....	17
4.2 Episodi 2: número de tirades per un doble sis	20
4.3 Episodi 3: la bola blanca	22
4.4 Episodi 4: els aniversaris.....	25
5. Conclusions	28
Bibliografia.....	31
Recursos web	32
A. Les transcripcions.....	i
A. Episodi 1: tres daus, dos diferents.....	i
B. Episodi 2: dos daus i treure un doble sis	i
C. Episodi 3: la bola blanca.....	i
D. Episodi 4: els aniversaris	i
B. Representacions en probabilitat	i

ÍNDIX DE FIGURES

Figura 4-1 Estratègia seguida per l'alumne 1.1 (Font: Alumnes)	17
Figura 4-2 Entrega del grup d'alumnes amb el seu raonament (Font: Alumnes)	24
Figura 5-1 Entrega d'alumnes del problema de la bola blanca (Font: Alumnes)	29

1. PRESENTACIÓ GENERAL DEL TREBALL

El següent treball busca servir-me com a conclusió de tot aquest procés que ha representat el Màster. I no hi ha millor manera de concloure la formació que la de perfilar un meu punt de partida metodològic en l'exercici docent.

Seguint el principi de que en aquest exercici de la docència un ha de seguir una metodologia en la que hi cregui, considerava important fer un recull d'aquells aspectes, primerament legals i després teòrics, amb els que podria argumentar una manera pròpia de fer classe. Donada la formació que aquest Màster m'ha donat, considerava important deixar de banda la creença i la intuïció que un té abans de començar la formació sobre com hauria de ser el meu exercici i estructurar l'acció en base a una teoria més fonamentada, dins el marc legal.

Així que un cop assentada la base teòrica, es va procedir a posar-la en pràctica i analitzar els seus resultats. Amb aquesta finalitat es va estructurar la intervenció autònoma i es va enregistrar diversos episodis amb alumnes que cobrien un ampli espectre de la diversitat de l'alumnat.

El que em proposo és analitzar si, tal i com senyalen els Standards (NCTM, 2000), una seqüenciació acurada de problemes pot servir com a vehicle per aprendre els continguts que marca el currículum.

D'aquestes transcripcions s'han seleccionat les més representatives tenint la confiança de que van haver-hi d'altres molt interessants però que no van poder ser enregistrades, i que a la vegada van haver-hi també certs moments de paràlisi productiva per part dels alumnes, fet que fa que el treball hagi estat real.

Voldria fer una menció especial al meu desenvolupament personal en el Màster. A més de la capacitat necessària, al Màster li demanava que em resolgués la incògnita sobre si jo voldria ser professor en un futur. A mesura que es desenvolupava, la meva motivació anava decaient i ha estat en arribar al pràcticum, i en particular a l'experiència viscuda al B-VII, on la situació s'ha capgirat totalment.

2. EL CURRÍCULUM I LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

2.1 L'APRENTATGE PER COMPETÈNCIES

En els últims anys ha eixit una preocupació respecte a la preparació que l'educació proporcionava als alumnes en els contextos de la vida real. Fruit d'aquest neguit apareix el terme competència que vol incidir en que no és només important assolir coneixements i procediments, sinó també cuidar l'accés als mateixos en funció de contextos on el ciutadà els poguera utilitzar.

No hi ha una definició de competència universalment acceptada de la que es pugui partir, però donat que ens regim per un marc legal, partirem de la que estableix el Decret 143/2007 de la ESO:

S'entén per competència la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers, cosa que implica la comprensió, la reflexió i el discerniment tenint en compte la dimensió social de cada situació. (DOGC, 2007, pàg 21872)

De cara a l'anàlisi del grau competencials dels problemes proposats prendrem els indicadors competencials publicats pel CREAMAT¹ i en destacarem els següents:

- és una activitat que té per objectiu respondre una pregunta?
- porta a aplicar coneixements ja adquirits i a fer nous aprenentatges?
- ajuda a relacionar coneixements diversos dins la matemàtica o amb altres matèries?
- es fomenta l'autonomia i la iniciativa de l'alumnat?
- s'intervé a partir de preguntes adequades més que amb explicacions?
- implica raonar sobre el que s'ha fet i justificar els resultats?
- s'avança en la representació de manera cada vegada més precisa i s'usa progressivament llenguatge matemàtic més acurat?

2.2 LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

Dins les vuit competències bàsiques que defineix el Decret s'estableix la competència matemàtica com una de les tres competències metodològiques i queda definida de la següent manera:

La competència matemàtica implica l'habilitat per comprendre, utilitzar i relacionar els números, les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió i raonament matemàtic, tant per produir i interpretar distints tipus d'informació, com per ampliar el coneixement sobre aspectes quantitius i espacials de la realitat, i per entendre i resoldre

¹ Veure Recursos Web, CREAMAT

problemes i situacions relacionats amb la vida quotidiana i el coneixement científic i el món laboral i social. (DOGC, 2007, pàg. 21880)

Voldria remarcar com el fet de resoldre problemes aplicant pensament matemàtic en situacions del dia a dia és un dels objectius fonamentals que marca l'assoliment d'aquesta competència i que també apareix de manera recurrent en altres definicions com la que la Comissió Europea estableix al *Key competences for a lifelong learning* (2007):

Aplicar pensament matemàtic a fi de resoldre un ventall de problemes en situacions del dia a dia (Comissió Europea, 2007)

O el marc teòric de PISA definint la 'Mathematical Literacy':

Analitzar, raonar i comunicar idees d'una manera efectiva al plantejar, formular, resoldre i interpretar problemes matemàtics en diferents situacions (OCDE, 2003)

De fet, el Currículum explicita que l'assoliment de la competència matemàtica implica l'assoliment d'una sèrie de competències inspirades tant el projecte PISA com en el projecte KOM danès (Niss, 2003). Donat que en el treball de camp els comentaris de les transcripcions intentaran girar entorn d'aquestes competències, les citaré a continuació (DOGC, 2007, pàg. 21927)

- Pensar matemàticament. Construir coneixements matemàtics a partir de situacions on tingui sentit, experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i realitzar abstraccions.
- Raonar matemàticament. Realitzar induccions i deduccions, particularitzar i generalitzar, reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes; argumentar les decisions preses, així com l'elecció dels processos seguits i de les tècniques utilitzades.
- Plantejar-se i resoldre problemes. Llegir i entendre l'enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació-problema, plantejar i resoldre problemes anàlegs, planificar i desenvolupar estratègies de resolució, verificar la validesa de les solucions, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors.
- Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic.
- Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques (per comptar, operar, mesurar, situar-se a l'espai i organitzar i analitzar dades) i els instruments (calculadores i recursos TIC, de dibuix i de mesura) per a fer matemàtiques.
- Interpretar i representar (a través de paraules, gràfics, símbols, nombres i materials) expressions, processos i resultats matemàtics.
- Comunicar als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, utilitzant el llenguatge matemàtic.

2.3 LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES COM A PROCÉS PER LA CONSTRUCCIÓ DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

La resolució de problemes es destaca al currículum com un dels processos fonamentals que han de servir per tal de “desenvolupar els continguts concrets” junt amb altres processos com són el raonament i prova i la comunicació i representació de la informació. Fins i tot remarca que:

Cal proporcionar en totes les classes de matemàtiques oportunitats per tal que l'alumnat aprengui a pensar i raonar matemàticament, proposant activitats d'aprenentatge on la resolució de problemes, en un sentit ampli, sigui el nucli de l'ensenyament. (DOGC, 2007, pàg. 21927)

El Currículum afirma que “la resolució de problemes facilita la construcció de nous coneixements, la transferència de conceptes, el desenvolupament d'estratègies de resolució i l'anàlisi del procés de resolució”.

Però no és només la resolució de problemes, també ho és la *comunicació* i la *representació* de la informació, que suposa l'organització i estructuració del coneixement per tal de donar-li ordre i coherència com el fet de fer-se preguntes i tractar de respondre-les, formular conjectures i argumentar la seva validesa o refutar-la definida al procés de *raonament i prova*.

2.4 LA INFLUÈNCIA DE LA METODOLOGIA I EL PROFESSOR

El que un docent pensa respecte al que són les Matemàtiques i el paper que té la resolució de problemes en l'ensenyament impactarà directament en el concepte, els aprenentatges i les significacions que un alumne es crearà. (Schoenfeld, 1992).

En la revisió que fan Stanic i Kilpatrick (1989) sobre la resolució de problemes van identificar cinc rols diferenciats sobre el paper de la resolució de problemes:

- Com una justificació per ensenyar matemàtiques: "alguns problemes relacionats amb un contexte de la vida real estan inclosos al currículum per convèncer als estudiants del valor de les matemàtiques"
- Per donar motivació específica per alguns temes amb la idea de que una vegada assimilats els continguts presentats, es podrà resoldre un tipus de problemes particulars
- Com a activitat recreativa
- Com a forma per desenvolupar noves habilitats
- Com una pràctica. Es mostra una tècnica per resoldre un exercici i a continuació es presenta una sèrie de problemes amb els que es pretén assimilar la tècnica presentada.

Aquestes propostes que situen la resolució de problemes com una habilitat que té el seu interès, però no estan en la línia que recuperant l'esperit de Pólya als anys 80 alguns matemàtics com Halmos (1980) tenien en afirmar:

Crec que els problemes són el cor de les matemàtiques, i espero que la seva importància anirà creixent per tal de que els nostres alumnes siguin millors resolutors

Tradicionalment s'havia pensat que el nostre coneixement era la suma total del que sabíem i que seguint aquest raonament, les matemàtiques eren un conjunt de conceptes i procediments que un podia utilitzar. Així, l'aprenentatge de les matemàtiques consistia en el domini d'aquests conceptes i processos.

En un estudi realitzat a començaments dels anys 80, Schoenfeld (1985) mostra com algunes d'aquestes idees són equivocades afirmant que treballar la resolució de problemes com una habilitat no és suficient doncs s'ha de tenir en compte altres aspectes. En primer lloc afirma que si bé els tenir recursos o coneixements és una condició necessària, com afirma la teoria clàssica, cal també tenir en compte que l'accés al mateixos i la facilitat com l'alumne els posa en pràctica.

Schoenfeld arriba a la conclusió que fins a assolir un domini en les matemàtiques molt gran els individus són empírics, és a dir, una conjectura és o no és certa si funciona en el moment de posar-la en pràctica. Això vol dir que a vegades, la precisió d'un dibuix o d'un càlcul pot ser determinant per refutar o no una teoria. Aquest aspecte de continuar o no amb una conjectura, i controlar el grau de dificultat i la fita que es vol assolir, l'autor el defineix com el control de l'alumne sobre el seu procés de resolució del problema.

2.5 LA TEORIA CONSTRUCTIVISTA I LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

El constructivisme comença amb les teories de Piaget (1954) que afirma que l'adquisició de coneixement, que és responsabilitat de l'alumne, es produeix en un procés en el que l'alumne primerament exposa els seus esquemes de coneixement per assimilar els nous continguts i després adapta els seus esquemes per tal d'integrar el nou coneixement. En aquest sentit, la resolució de problemes és un dels processos que afavoreixen aquest procés continu de desequilibrament i reequilibrament que suposa per l'alumne el fet de trobar-se davant de dificultats que han de ser superades amb nous coneixements, eines o estratègies.

La teoria de Piaget va ser evolucionada i més endavant David Ausubel (1963) va exposar el que ell considerava l'aprenentatge significatiu. De manera resumida, Ausubel considerava que un coneixement nou era significatiu si estava connectat amb el coneixement previ. Una vegada més, els problemes són una gran eina per tal d'enllaçar diferents parts del currículum amb contextos propis de les matemàtiques o d'altres branques del coneixement.

En l'enfocament matemàtic i de la resolució de problemes, als Standards (NCTM, 2000) també es parla d'aprenentatge significatiu com aquell que està contraposat a la memorització de procediments i coneixements sense que hi hagi comprensió i s'afirma que l'aprenentatge memorístic és fràgil i dificulta la

construcció de nous coneixements, i va més enllà, en dir que aquesta comprensió conceptual guanya rellevància en un món canviant i dinàmic.

Ausubel també afirma una sèrie de requeriments que ha de tenir el procés d'aprenentatge per tal que sigui significatiu, requeriments que els interpretarem directament com els que hauria de complir un problema presentat a classe.

En primer lloc, cal assegurar-se de que el contingut de l'aprenentatge sigui significatiu des del punt de vista lògic. És a dir cal que l'alumne percebi que els problemes presentats tinguin una certa relació dins la unitat didàctica i que percebi que tenen una coherència amb el contingut que s'està treballant. I en segon lloc, cal que tinguin significació des del punt de vista psicològic. És a dir, cal motivar a l'alumnat per tal de que el problema el vulgui resoldre i per tant cal donar-li importància, recolzant-se amb contextos reals o bé transmeten que com a docent, aquest problema és molt interessant. També podríem utilitzar paraules de Pólya (1944) quan afirmava respecte a un problema:

Cal presenta-lo d'una forma natural i interessant, dedicant-li un cert temps a la presentació

Amb aquesta metodologia un problema representaria un pont entre allò que ja se sap i allò que es vol aprendre, o bé utilitzant el concepte de Vigotsky (1978) una zona de desenvolupament potencial que l'alumne pot assolir amb l'ajut d'un adult, el professor. Però no és només el professor, també són els companys i l'entorn cultural el que intervé en la construcció de l'ensenyament. A través de la interacció amb altres individus es fomenten processos cognitius superiors que afavoreixen l'aprenentatge. És el que s'anomena bastida col·lectiva. Una altra vegada més, el fet de presentar un clima d'aula que afavoreixi l'intercanvi entre iguals d'idees, raonaments o conjetures està molt en la línia a aquests mecanismes mencionats per aquesta teoria sociocultural.

Finalment, com a conclusió d'aquest punt voldria posicionar el treball de camp fet agafant la idea de problema entesa com a eina per pensar matemàticament (Abrantes i Serrazina, 1996) amb la creació d'un ambient a classe que permeti el treball en grup per parts dels alumnes, amb lliure associació, fomentant l'intercanvi d'idees, el fer-se preguntes, conjetures, argumentant la seva validesa o refutar-les. És també essencial incloure les comunicacions alumne-alumne, alumne-professor com a vitals en aquest procés, de manera que sempre es busqui que l'alumne argumenti les seves resolucions amb raonament matemàtic i potenciant l'ús de les representacions matemàtiques en aquestes comunicacions.

3. ASPECTES TÈCNICS DEL TREBALL DE CAMP

El treball de camp es va realitzar durant la fase d'intervenció autònoma conjuntament amb la companya del Màster que m'acompanyava, la Marina, que va treballar amb l'altre grup del mateix nivell.

El nivell era de 4t d'ESO i teníem els següents objectius marcats pel currículum (DOGC, pàg. 21934)

- *Interpretació* de la probabilitat condicionada i dels successos independents.
- *Utilització del vocabulari* adequat per a descriure i quantificar situacions relacionades amb l'atzar.
- *Càlcul* de probabilitats de successos compostos utilitzant taules de contingència i diagrames d'arbre.

Aquests continguts es volien assolir mentre es resolien una sèrie de problemes, que es van presentar de tal manera que fossin significatius pels alumnes, que tinguessin un lligam entre ells mateixos i que s'observés una certa progressió. El propòsit de l'ensenyament per part del professor era el d'estimular als alumnes per tal que busquessin la solució al problema i que de manera no explícita estiguessin millorant els seus coneixements.

Aquest alumnes venien de treballar la probabilitat a 3r d'ESO i tenien el concepte de la Regla de Laplace (casos favorables entre casos possibles) perfectament interioritat. A més, ja estaven acostumats a treballar de la manera proposada i, per tant, el mecanisme de treball proposat era una continuació del que tenien.

Els mòbils personals van ser utilitzats per fer l'enregistrament i tot ser força potents, no va ser fins que vam descarregar una aplicació adequada que permetia l'enregistrament amb qualitat que el procés de transcripció no va ser fluid. Com a conseqüència, la majoria dels enregistraments es situen a l'última setmana.

De totes les transcripcions que es van fer, s'han seleccionat quatre episodis concrets en els que es mostren aprenentatges explícits de probabilitat per part dels alumnes. Per tant ens indiquen que, a través de la resolució de problemes, els alumnes han après probabilitat segons està indicat al currículum.

3.1 ELS PROBLEMES

PROBLEMA 1: COM ENS REPARTIM ELS DINERS

Enunciat: Dos jugadors juguen a un joc en que tenen la mateixa probabilitat de guanyar o de perdre, per exemple a la cara o creu. Posen sobre la taula la mateixa quantitat de diners, en total 20€, i decideixen que s'ho emportarà tot el

primer que arribi a sis victòries. Quan van 5 a 3, el joc s'interromp perquè apareix la policia. Com s'han de repartir els diners?

Grup: 4t A

Sessions: 2

Desenvolupament: A la primera sessió els hi va costar donar-li significació al problema. En la segona, va ser una resolució força directa.

PROBLEMA 2: DOS DAUS I TREURE UN DOBLE SIS

Enunciat: Quantes vegades cal tirar dos daus per tal de que la probabilitat de treure'n un doble sis sigui al menys del 50%?

Grup: 4t A

Sessions: 3

Desenvolupament: Va ser un problema que va representar força dificultat a gran part de la classe. Tot i les explicacions i els ajuts donats, el grup mig de la classe no va acabar de fer-se'l seu.

PROBLEMA 3: LA BOLA BLANCA

Enunciat: En una bossa hi ha una bola que pot ser blanca o negra. Afegim una bola blanca, tot seguit fem una extracció i resulta que és una bola blanca. Quina és la probabilitat de que l'altra sigui blanca.

Grup: 4t A

Sessions: 2

Desenvolupament: Gran part dels alumnes va fer propostes i va raonar alguna solució, va haver-hi força participació.

PROBLEMA 4: ELS ANIVERSARIS

Enunciat: Quantes persones ha d'haver-hi en una sala per tal de que la probabilitat de trobar-ne dues amb la mateixa data d'aniversari sigui al menys del 50%

Grup: 4tA, 4t B

Sessions: 2

Desenvolupament: Es va presentar, i donada la dificultat i el bloqueig que va suposar pel grup, la Marina va decidir proposar un problema alternatiu. Finalment, el va repartir a uns grups concrets per tal de que el presentessin a classe.

PROBLEMA 5: TRES DAUS, DOS QUE SIGUIN DIFERENTS

Enunciat: Quina és la probabilitat de que tirant tres daus al menys hi hagin dos iguals?

Grup: 4t B

Sessions: 2

Desenvolupament: Va funcionar força bé i molts grups van arribar a una solució. Es pretenia que for una bastida pel problema dels aniversaris.

4. TREBALL DE CAMP

4.1 EPISODI 1: TRES DAUS DOS QUE SIGUIN DIFERENTS

S'ha demanat als alumnes que calculin les possibilitats de que tres daus siguin diferents tirant-los una vegada.

L'alumne 1.1, comença amb una heurística que no li permetrà desenvolupar totes les possibilitats.

- **1.1:** Tenim 31, 41, 51, 61, 24, 34, 35, 145, 146
- **1.2:** 142
- **1.1:** Aquí hi ha 20 possibilitats
- **1.3:** I ara falta el 2, no?
- **1.1:** Tens raó, una pregunta. Aquí per exemple tenim que si sempre ens toca un 1 al principi tenim 20 possibilitats, llavors hem de calcular si l'1 està al mig o si l'1 està al final
- **NT** [miren a Sergi]
- **Se:** Perdoneu, perdona. Que no ho veig clar
- **1.1:** Si l'1 està al mig o si l'1 està al final. Per exemple, 213, 313...
- **Se:** És una manera, sí
- **1.1:** És molt llarga però és una manera
- ...
- **1.1:** Per això vull fer el 2, per veure la diferència. 213, 214...
- ...
- **1.2:** Així moriràs
- **1.1:** Moriré en el intento

1-2-3	1-3-4	1-4-5	1-5-6	1-6-2	
1-2-4	1-3-5	1-4-6	1-5-2	1-6-3	
1-2-5	1-3-6	1-4-2	1-5-3	1-6-4	20
1-2-6	1-3-2	1-4-3	1-5-4	1-6-5	

2-1-3	2-3-4	2-4-5	2-5-6	2-6-1	
2-1-4	2-3-5	2-4-6	2-5-1	2-6-3	
2-1-5	2-3-6	2-4-1	2-5-3	2-6-4	8
2-1-6	2-3-1	2-4-3	2-5-4	2-6-5	

3-1-4	3-2-1	3-4-5	3-5-6	3-6-1	
3-1-5	3-2-4	3-4-6	3-5-1	3-6-2	
3-1-6	3-2-5	3-4-1	3-5-2	3-6-4	8
3-1-2	3-2-6	3-4-2	3-5-4	3-6-5	

FIGURA 4-1 ESTRATÈGIA SEGUIDA PER L'ALUMNE 1.1 (FONT: ALUMNES)

Arriba la Marina i els parlar de com s'havia fet el dia anterior, els hi explica que fer-ho d'aquesta manera es fer buscant el complementari. L'alumne 1.1 explica a la Marina què està intentant fer.

- **Se:** En tot cas li podeu explicar que esteu intentant? Quin és el patró que estàs fent servir?
- **1.1:** Estic intentant aïllar l'1 de totes.
- **Ma:** Aïllar l'1?
- **1.1:** Sí, per tant aquí estic intentant trobat que l'1 sigui el primer nombre, aquí estic intentant buscar que l'1 surti en segon nombre
- **Se:** igual que la segona columna
- **1.1:** Sí, clar. I aquí estic intentant buscar els que surt el tercer nombre.
- **Se:** I no estàs treballant amb l'1?
- **1.1:** Sí
- **Se:** I per què aquests casos perduts? [senyalant els nombres que hi ha senyalats a la part que comença el 2]
- **Ma:** Clar aquí ja no hi ha 1, penseu fer totes les combinacions?
- **1.1:** Sí, jo sol no puc fer res ja, i aquests no ajuden, no saben que fer.
- ...
- **1.2:** Estem pensant, eh. O sigui no ets l'únic que saps fer algo. Encara q a tu t'ho sembli
- **1.1:** Jo us he dit si teníeu alguna idea i m'heu dit que no
- **1.1:** Aquí hi ha 20 i aquí hi ha 8. Amb el 1, eh! Però si les sumem totes aquestes hem de restar totes aquestes perquè ja les hem comptat un cop..

Mentre l'alumne 1.1 continua amb l'estratègia que havia pres com a vàlida, els alumnes 1.2, 1.3 i 1.4 miren la pissarra i observen un desenvolupament que havia fet una alumne al començament de la classe

- **1.3:** 11 no hi ha cap possibilitat
- **1.3:** Si toca 11 no es pot fer. 12 serien totes les possibilitats menys el 2. El 11 no es pot fer
NT [dedueixo que està pensant en 121]
- **1.3:** Perquè ja està repetit.
- **1.2:** Tens el 2, perquè ja no pots començar amb l'1. Tens el 3.
- **1.4:** 4...
NT [estan desenvolupament l'arbre de 1.2]
- **1.3:** Això és amb l'1
- **1.4:** Si està en primera posició. Si està en segona posició dóna un altre cop lo mateix...
- **NT** [recupera la idea de 1.1]
- **1.2:** Pues comences pel 2. Fas el mateix però amb el 2. No?
NT [estona de silenci, 10s]
- **1.2:** Això està bé, no?

- **1.1:** És lo mateix que he fet jo
- **1.2:** Si ara poses el dos aquí, fas lo mateix però començant per l'1. I no creus que seria més fàcil així?
- ...
- **1.3:** 20 per 6..però clar, jo ho entenc però per explicar-li.
- **NT** [torna arribar la Marina.]
- **Ma:** Vinga 1.2, ho has fet tu, no?
- **1.2:** Pues que poses el número 1, i les possibilitats que tingui: 2,3,4,5,6...perquè no pots posar el 1.
- **Ma:** Llavors com quedaria?
- **1.2:** Què vols dir 'com quedaria'?
- **Ma:** O sigui tens aquest esquema, com calcularies la probabilitat?
- **1.2:** No sé...
- **NT** [ara la Marina està contrastant les dues opcions]
- **Ma:** Vale ara ho entenc, llavors a partir d'aquí...com sabem totes les opcions que hi ha?
- **1.3:** De cada una tenim quatre...
- **1.4:** Quatre per cinc vint.
- **Ma:** Tenim vint opcions en total
- **1.4:** Amb l'1
- **Ma:** Vale, home és molt més ràpid
- **1.3:** De cada un d'aquest tens 20 possibilitats.
- **1.1** De 20 entre 36
- **1.3:** Clar, ja ho tenies. O sigui de cada un tens 20 possibilitats.
- **1.1** Són 20 de 36. Tens les 20 i les 36 que pertoquen.
- **1.3:** Llavors és 20 per 6 i 36 per 6.

Ja tenen clar que de cada un tens 20 entre 36 possibilitats i que es poden multiplicar per sis

En aquest primer cas s'observa coses que toquen molts aspectes en la construcció del coneixement matemàtic. En primer lloc, l'alumne 1.1, del que s'ha observat una marcada naturalesa de lideratge, comença utilitzant una tècnica que li portarà molts problemes, té molts dubtes i de fet no arriba a un resultat per la seva falta de convicció, ell percep que aquesta manera seva de fer no li portarà enlloc. *"moriré en el intentó", "és molt llarga però és una manera", "sí, jo sol no puc fer res ja,..."*.

Per altra banda, en un moment donat, els alumnes 1.2, 1.3 i 1.4 decideixen buscar-ne una altra via, i troben una solució *"si poses el dos aquí, fas lo mateix però començant per l'1. I no creus que seria més fàcil així?"*. El cas és que quan la Marina li pregunta a aquesta alumne per l'explicació, 1.2 decideix que no sap el perquè. Però voldria remarcar connotacions com que 1.1 i 1.2 estan en una relació amb rols una mica estranys, i a 1.2 se li va observar en diferents

situacions una tendència a no contradir a 1.1. Són coses a comentar per tal de que els aspectes emocionals es tinguin en compte.

Molt important també el final de l'extracte on s'observa la resolució del problema i com de manera efectiva s'estan aprenent continguts de probabilitat:

- **1.3:** clar, ja ho tenies. O sigui de cada un tens 20 possibilitats.
- **1.1** són 20 de 36. Tens les 20 i les 36 que pertoquen.

4.2 EPISODI 2: NÚMERO DE TIRADES PER UN DOBLE SIS

És la segona sessió del problema on se'ls ha demanat als alumnes quantes vegades s'han de tirar dos daus per tal de que les possibilitats de que surti algun doble sis siguin superiors al 50%. A l'alumne 2.1 li encanta resoldre problemes, i té un control i unes heurístiques de nivell molt alt, observarem pràcticament un monòleg seu.

En començar la sessió s'ha proposat als alumnes que mirassin de resoldre les possibilitats que hi ha de que plogui en algun dia de tres si les possibilitats de plogui un dia són del 50%.

- **2.1:** Serien 7/8
- **2.2:** Serien...
- **2.1:** Llavors, aquest és 1/2,
- **2.2:** 1/2 i aquí 3/4 i aquí 1/4
- **2.1:** 1, 2, 3...quarts.
- **2.1:** 1/2...vale, 3/4 sembla que aquí hagi de ser el doble...però aquest d'aquí ja no sé com va continuant.
- **2.1:** Vale, ja ho tinc.
- **2.1:** El de sota és per 2, i el de dalt és el de sota, el de sota més per dos menys un.

L'alumne 2.1 està buscant un model matemàtic que li pugui servir per resoldre els dos problemes, com que no està segur de que el model funcioni directament, observarem com es crea un problema intermig per verificar-ho, donant mostres de gran capacitat de pensament i raonament matemàtic.

- **2.1:** ja però aquest és el mateix però amb 36 coses
 - **2.4:** o sigui es el mateix simplement que multiplica
 - **2.1:** Sí. Ara calcularem amb 3 i si amb 3 segueix sent la mateixa població. No plou, plou, no plou...i d'aquests són 14,15,16...
 - **2.1:** Ara amb tres
 - **2.1:** A, B,C...
 - **2.1:** Ens interessa la C
 - **2.2:** Sí, tres novens
 - **2.1:** Vale, tres novens. Dos per tres sis, menys una 5. Vale, no es lo mismo
- NT** [està verificant la llei que havia fet amb el ploure no ploure, per aquest cas de tres variables]

- **2.1:** ...per tres menys quant...quan li hauria de restar? Perquè tres per tres són nou...llavors li hauria de restar 6.

L'alumne 2.1 té clar que està intentant i la finalitat de la seva recerca

- **2.1:** Estamos intentando hallar una relación para poder usar con el 36 porque es más fácil poner de tres en tres que de 36 en 36.

Més endavant una vegada han arribat a fer el comptatge pel cas de dos daus a nivell tres busca el contrast amb el professor. En aquí s'observarà una interacció que introduirà una confusió en l'alumne, és un moment en el que l'alumne veu que el camí escollit és inabastable per la complicació de càlculs i troba una sortida a través d'una frase del professor.

- **2.1:** Espera, uno de 36 en el primero. En el segon tenim 36 per aquest un (el del primer) i un més per cadascun dels altres 37. Per tant són 37 més 36...73. 73, què?
- **2.2:** És com que és de 36...36 per què?
- **2.1:** Tres por tres por tres...36 por 36 por 36. Imagínate que tuviéramos que hacer esto así?
[...]
- **2.1:** I a la següent cadascun d'aquests tenim, 36 per 36, 1 2 9 6 ja fets. Aquests són els que venien d'aquest primer i aquests ja haurien de ser-ho tots.
- **2.1:** D'aquests 37...no 35. D'aquests 35 per 36
- **2.2:** Ahh perquè és menys un, llavors hauria d'un menys, un menys
[...]
- **2.4:** Pero estos números son un poco grandes, no?
- **NT** [després de fer un càlculs]
- **2.1:** Això seria la tercera tirada
- **2.4:** Y cuántas tiradas tenemos que hacer?
- **2.1:** Ni idea...Sergi!
- **2.1:** Ens han sortit coses raonables
- **2.2:** Rares...però rares
- **2.1:** però a la que hem de seguir tardarem molt en fer la següent...vols dir que anem bé?
- **Se:** Ah, molt bona aquesta idea
- **2.1:** Llavors, el següent és el que és un lio, perquè són 36 per 36, més 35 per 36 més aquests que apareixen de nous.
- **Se:** No sembla mala idea, no?
- **2.1:** llavors aquí ens morim, perquè si hem d'anar comptant els números...
- **Se:** I aquí sota què hi ha? Perdona és que els números...
- **2.3:** 46656
- **Se:** Bueno pues anem al 8%, hem d'arribar al 50%
- **NT** [ha fet un càlcul amb la calculadora]
- **2.1:** Al 8%? Pues vaig a mirar quant ha augmentat cada vegada si és una progressió...

- **Se:** Una regla de 3, no?
- **2.1:** Sí, he de trobar una manera de fer-ho perquè si no em tornaré boig. Portem 3...i hem arribat al 8%!!!

Observem que en les interaccions entre els estudiants s'observa una forta dependència, amb prou feines els alumnes 2.2, 2.3 i 2.4 l'estan seguint. De fet, a la següent sessió va ser un grup partit i l'alumne 2.4 es va quedar separat de la resta del grup i jo vaig mirar de preguntar-li si podia explicar a la pissarra el que havia fet el seu grup, però no va ser capaç.

I com hem esmentat abans, és molt interessant veure una certa connexió que tenen els alumnes amb els percentatges i la regla de tres. Soc jo qui diu "*bueno pues anem al 8%, hem d'arribar al 50%*" i ràpidament l'alumne 2.1 diu "*al 8%? Pues vaig a mirar quant ha augmentat cada vegada si és una progressió*". No és la única vegada que vaig observar aquesta tendència, de fet de cara a implicacions curriculars, podria ser la probabilitat un dels primers casos on no es pot aplicar la linealitat en segons quins problemes.

Mentre aquest alumne està resolent aquest problema, està desenvolupant i aprenent una sèrie de tècniques que estan dins el que seria el recompte de probabilitats. Aquest alumne ha assolit completament en aquesta classe l'objectiu curricular del 'càlcul de probabilitat dels successos compostos', donat que ha vist clarament que li passa al conjunt de les probabilitats quan es vol relacionar un esdeveniment (tirar un dau una vegada) amb un altre (tirar un dau dues vegades).

4.3 EPISODI 3: LA BOLA BLANCA

És la segona sessió i al començament de la sessió alguns alumnes han sortit a exposar idees que tenien sobre com es podria resoldre. 3.1 ha estat un d'aquests alumnes, tot i que he exposat una idea que li ha fallat.

Són cinc alumnes que anomenarem 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5

- **3.1:** Vamos a poner dos planteamientos, el de las bolas blancas y de otro color que me he liado yo solo para hacerlo
- **3.1:** Y otro el del A, porque me ha gustado
- **Jo:** a veure, repeteix-lo
- **3.1:** Hay dos bolas, entonces hay un 50% de que salga una blanca. No...claro, es que no hay un 50%
- **Jo:** Hay un 50% de que cojas una bola o de que coja la otra?
- **3.1:** Pero eso es obvio
- **Jo:** Si coges una, qué puede pasar?
- **3.1:** O que sea blanca o que...
- **Jo:** Si coges la otra puede ser blanca o negra
- **3.3:** 50 y 50, no?
- **Jo:** Y ya está, y ahora cómo continuas?
- **3.2:** Pues ya está, ahora tienes una probabilidad entre muchos colores de que sea blanca o de otro color

- **3.3:** Entonces aquí es un 25% de que fuera negra o blanca la bola, no?
- **3.2:** No, o qué? Jordi?
- **Jo:** No ho sé, ho estic pensant
- **3.1:** Yo creo que de que la otra bola sea blanca, hay un 66,6%
- **3.3:** O un 25%...que sea blanca o negra
- **3.1:** Porque hay tres posibilidades, tres posibilidades
- **3.2:** No
- **3.1:** Sí, una que te salga...la que ya ha salido es blanca, o sea, que tienes otra dentro. Entonces puede ser o que sea la blanca, o la que ya has metido,
- **3.1:** O que sea la otra blanca que
- **3.2:** O que sea la otra que acabas de meter
- **3.1:** O que se la otra blanca o que sea la otra que es de color
- **3.2:** Vale, vale
- **3.1:** Hay tres posibilidades
- **Jo:** Bueno, escriu, escriu i...

En aquí hem tingut una interacció entre el professor (Jo) i l'alumne i en acabar la interacció, l'alumne 3.1 veu clara la solució. No es pot dir en cap cas de que les preguntes del professor hagin estat gaire manipuladores, però ha resultat suficient per a que l'alumne 3.1 vegi clarament la solució. No està gens clar el moment o la frase que fa que l'alumne vegi amb claredat la solució del problema, però el que sí que s'observa és que a partir d'aquest moment l'alumne defensa la seva opció a la resta del grup, i s'observa un interessant intercanvi entre els propis alumnes.

- **3.1:** A ver, has sacado una bola blanca que no sabes si es la que tú has metido o lo que ya estaba dentro
- **3.1:** Entonces puede ser que la bola que haya dentro, o sea, aquí una bola fuera, una mesa
- **3.1:** Una bola fuera...blanca...
- **3.2:** Pero esto está mal, en verdad esto no existe. La bola blanca-2 no existe, porque puede ser que sea blanca o puede ser que sea de otro color...es lo mismo, lo entiendes?
- **3.1:** Escúchame
- **3.2:** No, no, no, explícamelo
- **3.2:** Eh, 3.1, lo entiendes lo que te quiero decir? Eh 3.1?
- **3.2:** Eh, me estás escuchando? La bola blanca 1, esta es la que has metido, puede ser...
- **3.4:** En verdad hay dos posibilidades
- **3.2:** Sólo hay dos, puede ser la bola blanca que acabas de meter o puede ser la otra bola que es de cualquier color que ya incluye el blanco, entiendes?
- **3.4:** Puede ser un 25%,
- **3.1:** Puede ser, o bien la bola 1 o bien la bola 2, la que está dentro puede ser...hay dos posibilidades, o que sea la bola que tú has metido, o la otra. Si es la que tú has metido, es blanca seguro, si no, hay dos posibilidades...

- **3.1:** Entonces, hay tres posibilidades.
- **3.2:** Sí, planteándolo así, sí que lo veo.
[NT arribo jo, m'ho raonen]
- **3.1:** Hemos llegado a la conclusión
- **3.1:** Tú ya has sacado una bola, la tienes en la mano y es blanca, entonces queda una bola dentro. Y puede ser que sea la bola que tú has metido o la que ya estaba dentro. Si es la que tú has metido, seguro que es blanca, pero si es la que ya estaba dentro puede ser o blanca o de color.
- **Se:** Vale, por lo tanto?
- **3.1:** Hay tres posibilidades, entonces es un 33,33% cada posibilidad, que si sumas las que es blancas, es un 66,6%

Has sacado 1 bola blanca que no sabes si es la que tu has metido o la que ya estaba dentro.

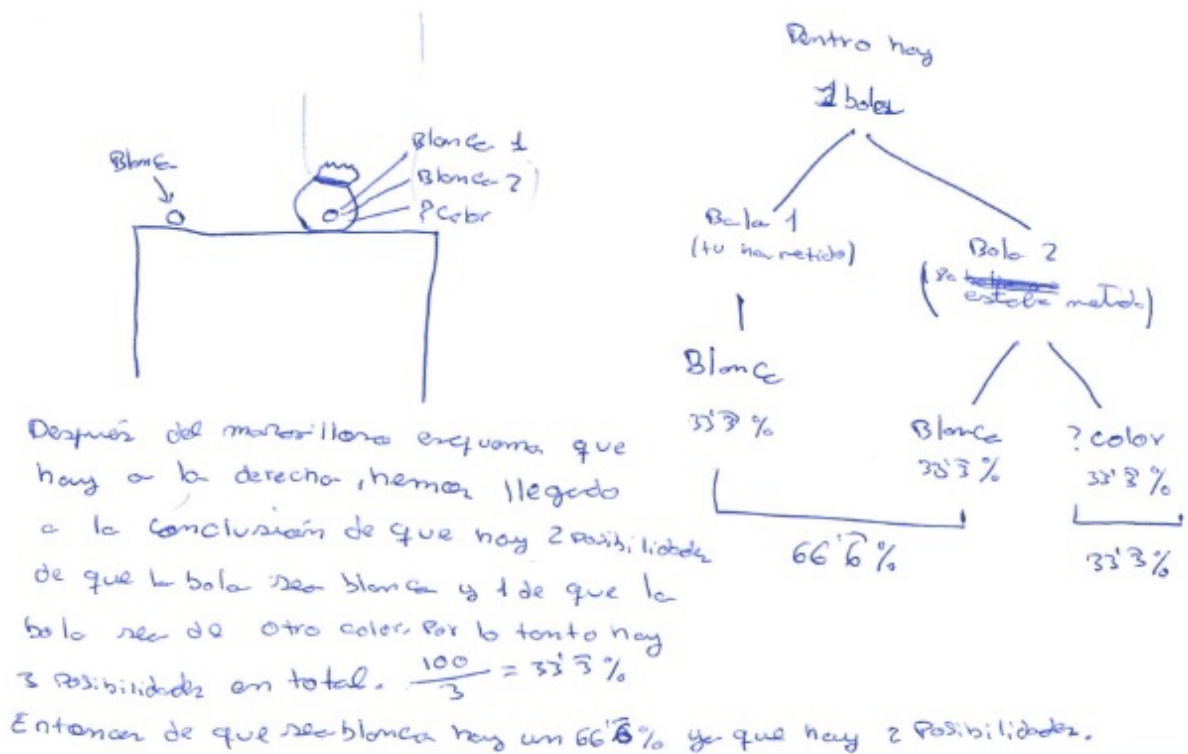


FIGURA 4-2 ENTREGA DEL GRUP D'ALUMNES AMB EL SEU RAONAMENT (FONT: ALUMNES)

Aquest problema desafiava el coneixement intuïtiu que hagués indicat que si queda una bola, les possibilitats de que sigui blanca seria del 50%. El primer dia de classe aquesta solució i la sensació de que no podia ser d'una altre manera va aparèixer constantment en els raonaments dels alumnes.

En aquesta transcripció es treballa la probabilitat condicionada i cal destacar la representació que es fa en la resolució amb aquest diagrama d'arbre, amb el que l'alumne mostra amb força claredat la solució. És important contextualitzar

aquest diagrama dins el transcurs de la unitat didàctica. Apareix a la sessió 7, just després d'haver fet una exposició que analitzava les diferents representacions que els alumnes havien treballat a les primeres sessions (veure Annex B), i emfatitzava l'ús de representacions per veure la solució més clara.

Recordem que tant les representacions com el treball amb la probabilitat estan explicitades com a objectius curriculars.

4.4 EPISODI 4: ELS ANIVERSARIS

Es presenta la següent sessió del problema amb el mateix grup. En aquí observarem com el professor decideix donar la clau de bon començament per tal de que els alumnes puguin desenvolupar el problema.

- **Ma:** Fem una cosa: fem-ho per parts. Aquestes són les possibilitats totals?
- **Tots:** Sí
- **Ma:** Estem tots d'acord. Anem a veure les possibilitats favorables. Fem només quan tenim dues persones...Quina es la probabilitat que les dues neixin el mateix dia. Ara, quan tenim tres quina es la probabilitat de que almenys dos neixin el mateix dia. Feu només aquests dos. Amb dues persones i amb tres.
- **4.1:** Això, no? Amb tres, vam quedar..
- **Ma:** Què m'heu fet amb tres?
- **4.1:** De que dues neixin el mateix dia, la primera i la segona el mateix dia i la tercera en dia diferent, la segona i la tercera el mateix dia, i l'altre en dia diferent, la primera i la tercera el mateix dia i la del mig en dia diferent, i que els tres neixin el mateix dia. Com que l'any té 365 dies podem ser 365 cops les possibilitats.

Davant aquest raonament, que podria donar un joc amb combinatòria, el professor decideix recuperar la idea principal que s'està treballant:

- **Ma:** Vale... us en recordeu del complementari que a vegades ens ajudava? Doncs ara proveu amb el complementari, es a dir, la probabilitat amb tres persones de que no hi hagi dos que almenys neixin el mateix dia.
- **4.1:** Això era que neixin els tres en dies diferents...a restar, a restar nois.
- **Ma:** Però intenteu fer-ho amb càlculs. Con ho vam fer amb els daus.
- **4.2:** Vam restar 100 menys això.
- **Ma:** Insisteixo que amb tres persones em calculeu la probabilitat de que neixin tots en dia diferents. Però no ho feu restant. D'una altre manera.

En aquest cas, ràpidament agafen la idea:

- **4.3:** Era allò de 365 per 364 per 363.
- **4.1:** Ho hem fet això, no?
- **4.3:** No.

- **4.1:** Collons..
- **4.3:** Entre 365 per 365 per 365.
- **4.1:** Com?
- **4.3:** 365 per 364 per 363
- **4.1:** Si
- **4.3:** Entre 365
- **4.2:** No
- **4.3:** Per què no? A veure...per exemple, el primer és el 1 de gener. El segon no pot ser l'1 de gener. Pot ser 364 menys l'1 de gener. Perquè no siguin iguals...

- **Ma:** Vale..doncs ara fem-ho amb quatre...
- **4.1:** Mmm..Jo ho estic fent amb unes quantes més...
- **4.4:** Elevado a cuatro, no?
- **4.3:** Claroo...
- **4.1:** Ho estem fent fins a 349.
- **Ma:** esteu fent moltíssimes més?
- **4.1:** Moltíssimes més? Ostres què hem fet? Està malament?
- **Ma:** Pregunto...
- **4.1:** Per 10 a la 36 crec que ens hem passat..no? Ai...
NT [una estona després]
- **4.1:** A no! És elevat a quatre!
- **4.3:** Quin estàs fent? Quatre persones? Si, és elevat a quatre.
- **4.1:** Ostia! Ja sé perquè m'he equivocat...
- **4.3:** Clar, aquí afegeixes una persona més..afegeixes un any més.
- **4.1:** 4.3, fes!
- **4.3:**entre 365 elevat al quadrat.. cero coma nou...tenim un 9,83% de que siguin tots tres diferents.

Si es llegeix amb cura es pot observar el moment en el que els alumnes connecten amb la idea que els portarà a resoldre el problema.

- **Ma:** Vale... us en recordeu del complementari que a vegades ens ajudava? Doncs ara proveu amb el complementari, es a dir, la probabilitat amb tres persones de que no hi hagi dos que almenys neixin el mateix dia.

És clar que per entendre que aquesta explicació tan breu ha funcionat cal contextualitzar-la dins el desenvolupament de la unitat didàctica. Els alumnes venen de resoldre un problema que utilitza la mateixa tècnica (veure Episodi I), i ara es tracta d'aplicar aquest aprenentatge en un de més complicat. En aquí és important ressaltar la idea de 'connectar'. Doncs el que la Marina està fent és mostrar els vincles entre el que els alumnes ja tenen i la nova problemàtica. El que ens porta a concloure que ha tingut que haver-hi aprenentatge per tal de resoldre aquest problema amb una explicació tan senzilla.

Per altra banda, el fet de que el professor hagi donat la clau del problema no impedeix un treball en els processos d'aprenentatge com la prova i l'error, el diàleg amb els companys i el control en la resolució del problema. En aquí observem l'alumne 4.1 fent els càlculs i com no li està quadrant el resultat fins que esbrina bé el procediment amb els seus companys.

5. CONCLUSIONS

L'objectiu de la unitat didàctica era l'aprenentatge de la probabilitat i en cap cas es pot excusar un dèficit en el mateix per raons del mètode. De les transcripcions podem deduir que hi ha un procés d'aprenentatge de la temàtica amb uns continguts que compleixen el marcat al currículum.

Si fem l'anàlisi competencial podem observar en aquests extractes diferents mostres de desenvolupament de la competència matemàtica, prenent com a referència les competències definides pel projecte KOM (Niss, 2003), mirem d'observar casos concrets de cada una i les enumerem segons l'article.

1. Pensar Matemàticament:

De l'episodi 1, destaquem la capacitat que té l'alumne 1 per fer-se preguntes i també per veure que el camí escollit no és gaire sostenible quan afirma '*moriré en el intento*'.

- **1.1:** Aquí per exemple tenim que si sempre ens toca un 1 al principi tenim 20 possibilitats, llavors hem de calcular si l'1 està al mig o si l'1 està al final
- **1.2:** si ara poses el dos aquí, fas lo mateix però començant per l'1. I no creus que seria més fàcil així?

2. Plantejar-se i Resoldre Problemes

A l'episodi 2 trobem com un alumne es planteja un problema per iniciativa pròpia com a pont per establir un vincle, entre un problema senzill i un de molt difícil.

- **2.1:** sí. Ara calcularem amb 3 i si amb 3 segueix sent la mateixa població. No plou, plou, no plou...i d'aquests són 14,15,16...
- **2.1:** Estamos intentando hallar una relación para poder usar con el 36 porque es más fácil poner de tres en tres que de 36 en 36.

3. Modelització matemàtica

En l'episodi 1 es mostra com els alumnes construeixen una solució per trobar les combinacions si el primer dau és un 1, el moment clau és quan s'adonen de que aquesta deducció els hi serveix per qualsevol número.

- **1.3:** si toca 11 no es pot fer. 12 serien totes les possibilitats menys el 2.
- **1.2:** Tens el 2, perquè ja no pots començar amb l'1. Tens el 3.
- **1.4:** si està en primera posició. Si està en segona posició dona un altre cop lo mateix...[Recupera la idea de 1.1]
- **1.2:** pues comences per el 2. Fas el mateix però amb el 2. No?

Per altra banda, tot l'episodi 2 és una demostració de com un alumne construeix un model matemàtic. Cada raonament que fa hauria de ser destacat en aquest punt.

4. Raonar Matemàticament

De l'episodi 4 destaquem el moment de raonament clau després de la interacció amb la Marina, on perfilen el model raonant el perquè.

- **4.3:** 365 per 364 per 363
- **4.1:** Sí
- **4.3:** Entre 365
- **4.2:** No
- **4.3:** Per què no? A veure...per exemple, el primer és el 1 de gener. El segon no pot ser l'1 de gener. Pot ser 364 menys l'1 de gener. Perquè no siguin iguals...

5. Representació d'entitats matemàtiques.

En aquest cas destacarem la següent figura en la que es mostra un diagrama d'arbre amb la que es justifica la resolució del problema.

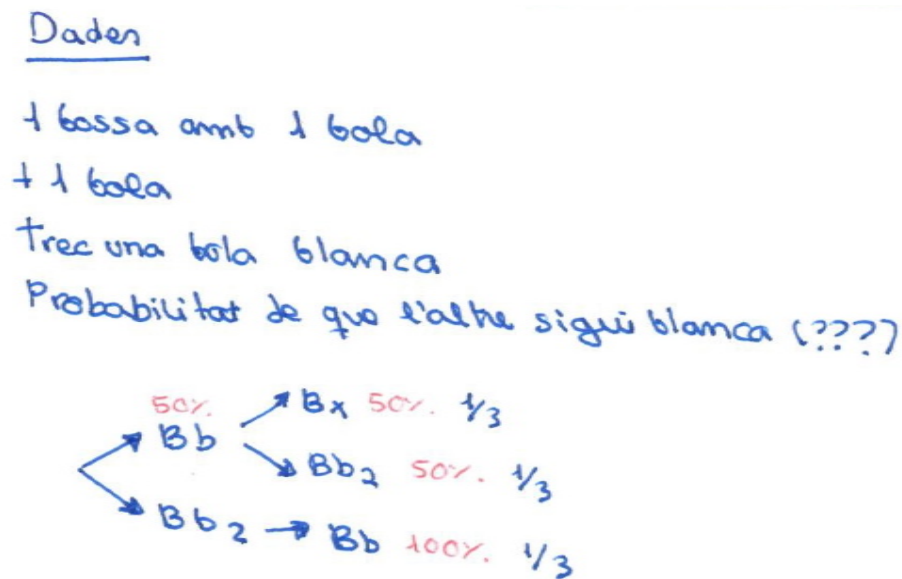


FIGURA 5-1 ENTREGA D'ALUMNES DEL PROBLEMA DE LA BOLA BLANCA (FONT: ALUMNES)

7. Comunicació en, amb i sobre les matemàtiques

De situacions comunicatives va haver-hi moltes, s'ha destacat el següent extracte en la que l'alumne explica la resolució del problema a un company seu. És clau la frase: '*sí, planteándolo así, sí que lo veo*'. Un èxit de l'aprenentatge entre alumnes.

- **3.2:** eh, me estás escuchando? La bola blanca 1, esta es la que has metido, puede ser...
- **3.4:** en verdad hay dos posibilidades

- **3.2:** sólo hay dos, puede ser la bola blanca que acabas de meter o puede ser la otra bola que es de cualquier color que ya incluye el blanco, entiendes?
- **3.4:** puede ser un 25%,
- **3.1:** puede ser, o bien la bola 1 o bien la bola 2, la que está dentro puede ser...hay dos posibilidades, o que sea la bola que tú has metido, o la otra. Si es la que tú has metido, es blanca seguro, si no, hay dos posibilidades...
- **3.1:** entonces, hay tres posibilidades.
- **3.2:** sí, planteándolo así, sí que lo veo.

Amb els episodis mostrats queda clar que la competència matemàtica té espai per desenvolupar-se a través de la resolució de problemes, sense descuidar l'aprenentatge del continguts.

Tot i això, amb la resolució de problemes no evitem les dificultats que es troba un professor quan el context que presenta l'alumne no és favorable. És a dir, també es produeixen moments on l'alumne no raona ni té motivació per fer-ho, i en aquests casos, un pot tenir la temptació d'agafar el guix i començar a resoldre el problema i demanar a l'alumne que copiï. És en aquest moment on un s'enfronta a la idea bàsica del que com a professor considera que són les matemàtiques i el seu ensenyament-aprenentatge.

L'experiència viscuda durant aquestes setmanes m'ha fet observar un patró, i és que el primer dia que proposes un problema hi ha tota una sèrie de barreres que es posen els alumnes que dificulten l'aprenentatge. Podríem conjecturar que aquestes barreres serien sobretot psicològiques com falta d'agilitat per adaptar-se al canvi o creences sobre la pròpia habilitat per resoldre els problemes. S'observava contínuament com els alumnes constantment volien utilitzar directament les dades del problema amb una fórmula sense fer cap raonament, utilitzar el problema anterior de manera directa sense fer cap adaptació, etc. Per tant, no estarien en la definició que donen els Standards (NCTM, 2000) respecte a la disposició per resoldre problemes com una actitud de confiança i motivació per prendre noves i difícils tasques. El cas és que el segon dia, els alumnes ja estaven més connectats amb el problema i sortien episodis com els destacats a l'anterior part.

Quan arriben els moments en el que tens la sensació de que el què has provat no ha funcionat recupero la motivació principal que estableix la meva creença de que en un context social com el que tenim a l'actualitat, on la incertesa i el canvi és una constant, l'educació ha d'intentar promoure actituds flexibles i molt adaptables al canvi i seguir-lo de manera àgil. Així a través de la resolució de problemes s'està educant a l'alumne en els valors en els que considero que són necessaris en la societat actual.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. i Serrazina, L. (1996). Matemática para todos (cap.2). Como se aprende. Dins Abrantes, Paulo i Serrazina, Lurdes: A matemática na Educação Básica. Lisboa: Ministério da Educação / Departamento de Educação Básica.

Ausubel, D (1963). The Psychology of Meaningful Verbal Learning. New York: Grune & Stratton.

DOGC (2007). Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria. (DOGC núm. 4915, de 29/06/2007, <https://www.gencat.cat/diari/4915/07176092.htm>) Consultat (30/04/2012)

European Comision (2007): Key competences for a lifelong learning. European reference framework. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. American Mathematical Monthly, 87, 519-524.

Niss, M. (2003) Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project. http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf (30/04/2012)

OCDE (2003): The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD. URL: <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>

Piaget, J. (1954). The construction of reality in the child (M. Cook, trans.) New York: Ballantine Books.

Pólya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.). p. 334-370 http://gse.berkeley.edu/faculty/ahschoenfeld/Schoenfeld_MathThinking.pdf (30/04/2012)

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. (1978) Mind in Society. Cambridge: Cambridge University Press.

RECURSOS WEB

CREAMAT. Indicadors Competencials. (30/04/2012)

<http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/suport-curricular/73-documents-de-suport-curricular/125-indicadors-competencials>

A. LES TRANSCRIPCIONS

A. EPISODI 1: TRES DAUS, DOS DIFERENTS

- 1.1: Tenim 31, 41, 51, 61, 24, 34, 35, 145, 146
- 1.2: 142
- 1.1: Aquí hi ha 20 possibilitats
- 1.3: I ara falta el 2, no?
- 1.1: tens raó, una pregunta. Aquí per exemple tenim que si sempre ens toca un 1 al principi tenim 20 possibilitats, llavors hem de calcular si l'1 està al mig o si l'1 està al final
[miren a Sergi]
- Se: perdona, perdona. Que no ho veig clar
- 1.1: Si l'1 està al mig o si l'1 està al final. Per exemple, 213, 313...
- Se: és una manera, sí
- 1.1: És molt llarga però és una manera
- 1.3: 313 no es pot
- 1.1: m'he equivocat ... idiota
- 1.3: jo no he dit res
- 1.1: llavors hem de fer tots els casos. Tenim molt de temps, no, encara?
- Se: jo pregunto, eh
- 1.1: per això vull fer el 2, per veure la diferència. 213, 214...
- 1.3: 314
- 1.1: no, perquè han de sortir com aquí (senyala la taula de l'1)
- SE: però...no dic res.
- 1.2: així moriràs
- 1.3: moriré en el intent
- Ma: vosaltres m'ho veu fer amb la resta ahir, no?
- 1.1: sí
- 1.3: si
- 1.1 Perquè si comptem tots els casos que són de dos o de tres estan ja comptats, doncs els únics q són diferents són la resta
- Ma: vale, només poden ser de dos o de tres igual?
- 1.1: o tots diferents
- Ma: i perquè no pots fer-ho així?
- 1.1: home...
- Ma: o sigui estaria fent 1 menys...1 menys la fracció que tenim aquí.
- 1.1: però clar teníem $216/216$ menys $96/216$, que això ho vaig fer jo. Jo ho vaig fer-ho així. P
- Ma: vale, feu-m'ho
- 1.1 Vam fer $216/216$ menys $96/216$ per tant la resta queda $120 / 216$
- Ma: i aquest per què me l'heu fet així [senyalant $216/216$] ?
- 1.1 perquè era el total de possibilitats q podem
- Ma: vale llavors 1 menys la probabilitat total. Sabeu com es diu això de 1 menys la probabilitat que tenim...? Es diu el complementari. Hem de fer la probabilitat total menys la que tenim. Molt bé, doncs diguem a veure com ho esteu fent. Esteu provant una altre manera, no?

- 1.1: Sí
- Se: en tot cas li podeu explicar que esteu intentant? Quin és el patró que estàs fent servir?
- 1.1: Estic intentant aïllar l'1 de totes.
- Ma: aïllar l'1?
- 1.1: Sí, per tant aquí estic intentant trobat que l'1 sigui el primer nombre, aquí estic intentant buscar que l'1 surti en segon nombre
- Se: igual que la segona columna
- 1.1: Sí, clar. I aquí estic intentant buscar els que surt el tercer nombre.
- Se: I no estàs treballant amb l'1?
- 1.1: sí
- Se: I per què aquests casos perduts? (senyalant els nombres que hi ha senyalats a la part que comença al 2)
- Ma: clar aquí ja no hi ha 1
- Ma: penseu fer totes les combinacions?
- 1.1: si, jo sol no puc fer res ja, i aquests no ajuden, no saben que fer.
- Se: tu continua, tranquil. Però si deixes de fer sistemàtic el tema aquest
- 1.1: em moriré, oi?
- Se: no només et moriràs, sinó no sabràs que has fet i que no has fet. Però bé, continua.
- 1.2: estem pensant, eh. O sigui no ets l'únic que saps fer algo. Encara q a tu t'ho sembli
- 1.1: jo us he dit si teníeu alguna idea i m'heu dit que no
- Ma: potser si en comptes de mirar només agafem un full i intentem fer coses
[Treuen els fulls i silenci]
- 1.1: Aquí hi ha 20 i aquí hi ha 8. Amb el 1, eh! Però si les sumem totes aquestes hem de restar totes aquestes perquè ja les hem comptat un cop..
- 1.2: clar.
- 1.1: Que no se puede hacer, que da más...alguna idea?
[Una estona de raonament i molt de soroll, sense interaccions. 1.4 i 1.3 miren la pissarra per un desenvolupament q havia fet un alumne]
[En 1.4 i 1.3 comencen a raonar mirant la pissarra, tira en 1.4 de la idea. 1.3 la segueix, finalment 1.2 també s'afegeix. 1.1 està amb el raonament exposat anteriorment]
- 1.3: 11 no hi ha cap possibilitat
- 1.4: si toca 11 no es pot fer. 12 serien totes les possibilitats menys el 2. El 11 no es pot fer [dedueixo que està pensant en 121] perquè ja està repetit.
- 1.2: Tens el 2, per què ja no pots començar amb l'1. Tens el 3.
- 1.3: 4...
[Estan desenvolupament l'arbre de 1.3]
- 1.4: això és amb l'1
- 1.3: si està en primera posició. Si està en segona posició dóna un altre cop lo mateix...
[Recupera la idea del 1.4]
- 1.2: pues comences per el 2. Fas el mateix però amb el 2. No?
- [estona de silenci, 10s]
- 1.2: això està bé, no?
- 1.1: és lo mateix que he fet jo

- 1.2: si ara poses el dos aquí, fas lo mateix però començant per l'1. I no creus que seria més fàcil així?
- 1.1: i per què no m'ho havieu dit abans?
- 1.2: doncs perquè se m'acaba d'acudir.
- 1.4: 20 per 6..però clar, jo ho entenc però per explicar-li.

- [Torna arribar la Marina.]
- Ma: vinga 1.2, ho has fet tu, no?
- 1.2: pues que poses el número 1, i les possibilitats que tingui: 2,3,4,5,6...perquè no pots posar el 1.
- Ma: llavors com quedaria?
- 1.2: què vols dir 'com quedaria'?
- Ma: o sigui tens aquest esquema, com calcularies la probabilitat?
- 1.2: no se...
- [Ara la Marina està contrastant les dues opcions]
- Ma: vale ara ho entenc, llavors a partir d'aquí...com sabem totes les opcions que hi ha?
- 1.4: de cada una tenim quatre...
- 1.3: quatre per cinc vint.
- Ma: tenim vint opcions en total
- 1.3: Amb l'1
- Ma: vale, home és molt més ràpid
- [la Marina marxa, comencen a redactar-ho]
- 1.3: De cada un d'aquest tens 20 possibilitats.
- 1.1 de 20 entre 36
- 1.3: clar, ja ho tenies. O sigui de cada un tens 20 possibilitats.
- 1.1 són 20 de 36. Tens les 20 i les 36 que pertoquen.
- 1.3: llavors és 20 per 6 i 36 per 6.
- [Ja tenen clar que de cada un tens 20 entre 36 possibilitats i que es poden multiplicar per sis]

B. EPISODI 2: DOS DAUS I TREURE UN DOBLE SIS

- 2.5: "es que no es posible que un problema que pongáis entre 30 cabezas no se saque y que tardemos mil días. Es que no puede ser eso. Como calculáis para que nos saquemos en el día que lo hacemos."
- Se: No calculo nada
- 2.5: Igual tienes programado que se saque de aquí cuatro clases. ¿Cómo haces para que se saque...?
- Se: No tengo programado nada
- 2.5: pero entonces?
- Se: pero lo podéis acabar hoy, no?
- 2.5: Hoy?
- Se: Sí
- 2.6: Es imposible
- 2.5: eh, 2.1. ¿Por qué nos pasamos varios días?
- 2.1: qué?
- 2.5: los problemas
- 2.1: qué problemas?
- 2.5: los problemas que hace el profesor, porque se pasan varios días?
- 2.1: por qué se sacan en qué?
- 2.5: en varios días, se necesitan varios días para sacarlos
- 2.1: porque el primer día te pones, no te sale. El segundo día tampoco, el tercer día coge te da una pista y anda mira si sale.

[alumnes 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4]

[comencen calculant la probabilitat de que plogui en algún dels tres diez següents]

- 2.1: Serien 7/8
 - 2.2: Serien...
 - 2.1: calla
 - 2.1: 2.3, 7/8
 - 2.1: llavors, aquest és 1/2,
 - 2.2: 1/2 i aquí 3/4 i aquí 1/4
 - 2.1: 1, 2, 3...quarts.
 - 2.1: 1/2...vale, 3/4 sembla que aquí hagi de ser el doble...però aquest d'aquí ja no sé com va continuant.
 - 2.1: vale, ja ho tinc.
 - 2.1: el de sota és per 2, i el de dalt és el de sota, el de sota més per dos menys un.
- [NT: en aquí el 2.1 està analitzant un arbre que no és complet, és 'podat' i mira de trobar la llei que segueix l'expressió del 7/8]
- 2.2: Sí, això ho he trobat
 - 2.1: dos per dos quatre menys un...tres
 - 2.1: quatre...
 - 2.2: ...per quatre
 - 2.1: no
 - 2.2: vale, espera

- 2.1: dos...vuit menys una set. I ara el segon què hauria de donar?
- 2.1: plou, no plou, plou, no plou, plou, no plou
- M: [diu una frase que no es pot transcriure]
- 2.1: ja però aquest és el mateix però amb 36 coses
- P: o sigui es lo mateix simplement que multiplica
- 2.1: sí. Ara calcularem amb 3 i si amb 3 segueix sent la mateixa població. No plou, plou, no plou...i d'aquests són 14,15,16...
- 2.1: ara amb tres
[comencen un problema amb casos possibles: A, B i C]
- 2.1: A, B,C...
- 2.1: ens interessa la C
- 2.2: Sí, tres novens
- 2.1: vale, tres novens. Dos per tres sis, menys una 5. Vaaale, no es lo mismo
[NT està verificant la llei que havia fet amb el ploure no ploure, per aquest cas de tres variables]
- 2.4: es lo que te estaba diciendo
[NT no se li sent bé, podria haver-ho indicat]
- 2.4: ... 36 y multiplicamos tres por dos,
- 2.1: 6 no es un 1/6, dos medios...
- 2.4: bueno, me da igual. Me da igual, no quiero competir.
- 2.1: nono, 6 no es un 1/6...6 son 36/6
- 2.4: es mi fallo
- 2.1: es q no se si has copiado de 2.7
- 2.1: que no, que no. Que noooo, a veure aquest d'aquí.
[NT torna a mirar-se el problema de l'ABC]
- 2.3: si en comptes de fer-ho per tres...lo que estàs fent ara
- 2.1: estic comprovant a veure si seria això
- J: sí, sí...perdó, perdó
- 2.2: seguim la mateixa fórmula que dalt
- 2.1: ...per tres menys quant...quan li hauria de restar? Perquè tres per tres són nou...llavors li hauria de restar 6.
[NT: recordem el 3/9 que és el primer resultat]
- 2.1: vale ara el següent, podria ser A, B, C
[NT estan al nivell tres de l'arbre ABC]
- 2.1: 23,24,25,26,27
- 2.2: tio, 27, què té que veure?
- 2.1: 9 per 3 són 27. I ara aquests quants són?9, 9 de 27
- 2.2: ah clar, el de sota és multiplica per tres i el de dalt també
- 2.1: aquest també podria ser el de dalt per tres. El següent que hauria de donar?
- 2.4: 27 por 3...
- 2.1: 27 por 9
- 2.4: por 9?? [força incrèdula]
- 2.1: sí. El siguiente nos vamos a morir, eh
- 2.2: ja, no fem això que sinó...
- 2.1: tendría que haber estos, y arriba cuántos? 9 por 3, 27
- 2.1: oi que pots reduir això?...1/9

- 2.1: vale, no puede ser. Aquí va augmentant la probabilitat $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$,
- 2.1: i aquí va disminuint: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{1}{9}$. Algo hemos hecho mal
- 2.4: qué estais haciendo?
[pausa d'un minut]
- 2.3: has comptat malament, jo tornaria a comptar
- 2.1: aquest de dos va augmentant la proporció i en aquest va disminuint
- 2.1: en el primer de 3, tenim una C.
- 2.1: vale, ya lo encuentro, que me he equivocado al contar. Ya está.
- 2.1: Sí, són 1,2,3, 1 de 3 amb la C...pues tots aquest d'aquí ja tenen C. A banda, per tant que surti una C ja està.
[2.1 continua comptant, 2.4 i 2.3 estan fent bromes amb el fet d'estar enregistrat]
- 2.1: vale, cinc! Es eso! 3 por 2...6 menos 1, 5! Ahora dóna lo mateix
- 2.2: i aquest 5 de què és?
- 2.1: els casos en que surti alguna C. 1, 2, i tots aquests ja han sortit per què aquesta C ja hi era.
[sembla ser que 2.4 li pregunta que està fent]
- 2.1: Si tirem alguna cosa que tingui tres cares, no sé si podrem tirar alguna cosa que tingui tres cares però bueno, tirem una mena de dau que tingui tres cares, jeje és molt raro
- 2.1: tenim A,B, C i volem tirar fins que surti C. Tenim una C, aquí tenim 1, 2 i tots aquests ja ens ha sortit abans.
- 2.4: aahhh [com desganada]
- 2.1: llavors tinc 1,2 i aquests tres
- 2.2: aahh claaar!
- 2.1: el cas és que surti una, no que surti una ara com que aquesta ja hi és doncs ja està
- 2.4: pero por qué te complicas tanto haciendo esto?
- 2.1: pues mira, porque me aburro
[sembla ser que ve algú d'un altre grup i hi ha un intercanvi de resultats]
- 2.1: estamos intentando hallar una relación para poder usar con el 36 porque es más fácil poner de tres en tres que de 36 en 36.
- 2.4: pero que has hecho, Dios Mio! Mira...
[NT alguna frase de l'interlocutor extern]
- 2.1: yo no digo q no
- 2.3: jo he dit que no pot ser
- 2.1: amb tres, hi ha 27, i quants favorables hi ha?
- 2.1: 3,4,5,6,8,9,11,...17,18,19
- 2.2: vaaale, ja ho entenc
- 2.1: i 19, què seria?
- 2.2: 9 per 2 més 1
- 2.1: nooo per dos més 1...no [fa veu q no li quadren les coses]
- 2.2: ahhh que pasa
- 2.1: Dios mio, está pasando algo.
- 2.1: 9 per 3...un moment
- 2.2: el q jo no entenc és perquè ens ha sortit malament
- 2.1: nooo, si ens ha sortit bé...el que jo no entenc és perquè és perquè surt això

- 2.3: vuit menys un
- 2.1: ens ha sortit [...] però ens ha sortit algo
- 2.2: si,si...lo que voldria saber és perquè surt això
- 2.1: tornem a comptar
[ara ja es posen amb els daus]
- 2.1: espera, uno de 36...en el primero. En el segon tenim 36 per aquest un (el del primer) i un més per cadascun dels altres 37. Per tant són 37 més 36...73. 73, què?
- 2.2: és com que és de 36...36 perquè?
- 2.1: tres por tres por tres...36 por 36 por 36. Imagínate que tuviéramos que hacer esto así?
- 2.4: mira
- 2.3: pilles però molt
- 2.1: a la primera ja van mil, a la segona ja...
- 2.3: apa!
- 2.1: 46000
- 2.2: nooo, 46000? Ah clar, 1296 per 36
- 2.1: i a la següent cadascun d'aquests tenim, 36 per 36, 1 2 9 6 ja fets. Aquests són els que venien d'aquest primer i aquests ja haurien de ser-ho tots.
- 2.1: d'aquests 37...no 35. D'aquests 35 per 36
- 2.2: ahh perquè és menys un, llavors hauria de un menys, un menys
- 2.1: En aquest següent, queden
- 2.2: abans havia sortit 9 més 9 més 9
- 2.1: 35 per 36 menys 35...hauria de ser, no...i 36
- 2.1: dóna això
- 2.1: aquests haurien de ser...ja m'he perdut...na...espera
- 2.1: tenim, a la primer ens surten 35 de diferents i un de 36 és aquest doble sis. A la primer tenim un de 36.
- 2.1: a la següent aquest 1 ens és igual el que surti són 36 més que ja tindrien aquest 1. 36., i per altres hi ha un que ho tindria, 35 + 36.
- 2.1: El següent, 35 per 36 i els que teníem abans són 36 per 36,
- 2.1: els que estan de nou que eren...
- 2.1: no espera que son...esto...menos
- 2.1: això d'aquí menys això entre 36 més aquests
- 2.4: pero estos números son un poco grandes, no?
[NT dp de fer un càlculs]
- 2.1: això seria la tercera tirada
- M: i cuántas tiradas tenemos que hacer?
- 2.1: ni idea...Sergi!
- 2.1: ens han sortit coses raonables
- 2.2: rares...però ra..
- 2.1: però a la que hem de seguir tardarem molt en fer la següent...vols dir que anem bé?
[NT una estona q parlen entre ells, jo he desaparegut]
- 2.1: amb el de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$...no?
- Se: sí...qué quiere decir $\frac{15}{16}$?
- 2.1: $\frac{15}{16}$...una vegada, dos vegades, tres vegades,...

- Se: això és lo de plou i no plou, no?
- 2.1: sí, això és amb el de dos
- Se: per tant, les possibilitats de que plogui quines són? 15/16?
- 2.1: sí, per tant mai arribarem a 1
- Se: a 1 no podem arribar mai
- 2.1: amb el de 3, la primera tirada seria això, la segona això i la tercera això.
- Se: ah...vale
- 2.1: amb el de 36 és això, 1/36, 71...això, i això
- Se: són números, no sé d'on surten aquests números
- 2.1: vale, pues és això. Hem fet això...la primera dels 36 que hi ha 1 seria doble sis, vale, 1/36
- 2.1: a la següent, tots els que ramifiquen d'aquest ja n'ha sortit un doble sis, per tant tots els 36 que surten d'aquests ja el tenim. Per tant, 36 més 35 que apareixen de nou.
- Se: ahhh, molt bona aquesta idea
- 2.1: Llavors, el següent és el que és un lio, perquè són 36 per 36, més 35 per 36 més aquests que apareixen de nous.
- Se: no sembla mala idea, no?
- 2.1: llavors aquí ens morim, perquè si hem d'anar comptant els números...
- Se: i aquí baix què hi ha? Perdona és que els números
- 2.3: 46656
- Se: bueno, pues anem al 8%, hem d'arribar al 50%
[NT ha fet un càlcul amb la calculadora]
- 2.1: al 8%? Pues vaig a mirar quant ha augmentat cada vegada si és una progressió...
- Se: una regla de 3, no?
- 2.1: sí, he de trobar una manera de fer-ho perquè si no em tornaré boig. Portem 3...i hem arribat al 8%!!!
- 2.4: pero nos podemos morir
- 2.1: vamos a morir
[NT una estona...]
- 2.1: vaaale, lo tengo!
- 2.1: 2,7 por 2... 5,4
- 2.1: 2,7 por 3...8,1
- 2.4: entonces si buscamos por x números nos dará el 50%
- 2.1: vale, a ver, vamos a probar
- 2.1: 6 por 2,7...no se acerca al 50%
- 2.1: inténtelo otra vez
- 2.4: a ver, 2,7 por 15...lo veo
- 2.1: 40,5...no son 15
- 2.4: 20...
- 2.1: profe...
- 2.1: me da una cosa que tú me habías dicho que no daba
- 2.4: te da lo mismo que antes
- 2.1: no, en lugar de 18 me daba 19
- 2.4: ah, son 19?
- 2.1: sí, son 19
- 2.4: justo 19?

- 2.1: sí, justo 19
- 2.4: no puede ser 18?
- 2.3: el Sergi ens estafa
- 2.1: sí, sí...ens hem tornat gairebé bojós
- 2.1: amb el de si fossin només dos possibilitats, seria $\frac{1}{2}$, la segona $\frac{3}{4}$ i la tercera $\frac{7}{8}$...15/16
- 2.1: si només hi fossin dos possibilitats
- 2.1: després ho hem provat amb tres
- 2.3: ...a veure si hi havia alguna relació...
- 2.1:...alguna relació amb l'anterior
- 2.1: relativament cap
- 2.1: la primera 1/3, la segona 5/9 i 19/26
- 2.1: i llavors ho hem provat amb el de 36.
- 2.1: la primera vegada dels 36 que surten, només 1 és favorable
- 2.1: la següent vegada tots els que surten del que era favorable, que són 36, són favorables...més 35 nous que apareixen. Per tant són 35 més 36...71
- Ma: I aquests nous que apareixen?
- 2.1: perquè els altres 35, cada un es ramifica en 36 i cada un d'aquests té un favorable
- 2.1: Llavors el següent són 35 per 36, perquè com ja ha sortit un tornen a ser tots favorables. Els 36 d'abans per 36, més els que surten nous.
- 2.1: I partir d'aquí el desenvolupament es lia molt
- 2.1: i això és el 2,7%, 5,4% i 8,1%
- Ma: i aquest d'aquí baix...com era?
- 2.1: què?
- Ma: vull dir, dalt m'ha quedat clar però baix? D'on surt aquest 36?
- 2.1: això per 36 per 36 per 36
- 2.1: 2,7 per 2...5,4
- 2.1: 2,7 per 3...8,1
- 2.2: i fins al 50
- 2.1: per tant hem vist 2,7 per 19
- ...
- 2.1: per tant en 19 tirades
- Ma: intenteu posar-ho en comú i quan vingui el Sergi...
- 2.1: vale, está bien! Ahora falta entenderlo
- 2.3: això ja és un tros
- 2.2: jo tb
- 2.4: jo tb
- 2.1: vale mira, ho torno a fer
- 2.2: nonono
- 2.4: no, no hace falta
- 2.1: no, no...sí, sí ho faré
- 2.1: son 1, 2, 3...queremos que salga algún tres. Y en este tenemos un 3 de las que hemos tirado
- 2.1: en la siguiente, uno, dos, uno, dos, tres, uno, tres...qué pasa?

- 2.1: en esta ha salido un tres que antes no teníamos, otro tres...pero aquí como ya nos había salido un tres antes por este lado ya ha salido un tres. Por tanto todas estas también cuentan como tres.
- 2.3: ah vale, ara entenc perquè sortia abans un novè
- 2.4: sí, jo ja ho he entès fa rato
- 2.3: vale
- 2.1: vale es lo mismo que el de llueve o no llueve
- 2.1: este día ha llovido, no es por lo haga al día siguiente, si ha llovido un día...ya, ya está
- 2.4: ya lloverá
- 2.1: pues entonces, tres más dos son...
- 2.1: y luego el siguiente, cada uno de estos tres vuelve a ser otro tres. Porque ya lo teníamos antes y los nueve que salen aquí ya son favorables, más los tres que salen de aquí más uno de los tres que sale aquí. Que son uno de aquí, uno de aquí...son cuatro, y cuatro más tres de aquí tres de aquí seis más 9...y en total son 19 entre 27.
- 2.1: entonces el de aquí es lo mismo pero con número mucho más grandes
- 2.1: en la primera sale 1 de 36, en la siguiente...
[NT alguna petita conversa]
- 2.1: Sergi, ho hem trobat. Són 19 tirades.
- 2.1: perquè...2,7%, tires una vegada més 2,7%, tires una vegada 2,7&
- 2.2: fins arribar a 50...
- 2.1: 19 per 2,7 son 51,3
[NT en Sergi dubta i no sap refutar-ho. Fa càlculs...]
- Se: no ho estic veient, clar, bueno. 1/36 partim de 2,7% de possibilitats.
- Se: i el segon...mm...5,4
- Se: tot indica que escala d'aquesta manera
- 2.1: i el tercer dóna 8,1
- Se: i així fas 0,5 entre 0,027 i dóna 19
- Se: pues aquest mètode...mmm...no és
- 2.1: nooo????
- Se: en algun moment està fallant
- 2.4: com que no? Quantes vegades són?
- 2.2: no ens ho dirà
- 2.1: a la primera un és favorable...més...
[NT en 2.1 ho explica un altre vegada. En Se es queda al·lucinat per aquest comptatge]
- 2.1: ens rendim

C. EPISODI 3: LA BOLA BLANCA

- Se: penseu que ara us ho recolliré, o sigui, agafeu una idea. Però vull recollir alguna cosa.
- 3.2: pero si es que no sabemos razonar, o sea, lo tenemos
- Se: simplement si teniu una idea, la fiqueu, l'expliqueu i ja està
- 3.5: mira Germán...
- 3.1: podemos también utilizar dos ideas? Que no estamos seguros...
- Se: tú di, no estoy seguro por estoy y no estoy seguro por esto
[NT una mica de relax]
- 3.1: vamos a poner dos posibles soluciones, la primera la que yo he puesto, la del 3.7. Porque me parece 'no razonable'
- 3.2: pero ha dicho que está bien el razonamiento, no bien el ejercicio.
- 3.1: bueno, ponemos bien el razonamiento y ya está
- 3.2: tú vas a lo fácil, te merecerías un cuatro
- 3.1: vamos a poner dos planteamientos, el de las bolas blancas y de otro color que me he liado yo solo para hacerlo
- 3.1: y otro el del A, porque me ha gustado
- J: a veure, repeteix-lo
- 3.1: hay dos bola, entonces hay un 50% de que salga una blanca. No...claro, es que no hay un 50%
- J: hay un 50% de que cojas una bola o de que coja la otra?
- 3.1: pero eso es obvio
- J: si coges una, qué puede pa3.3r?
- 3.1: o que sea blanca o que...
- J: si coges la otra puede ser blanca o negra
- 3.3: 50 y 50, no?
- J: y ya está, y ahora cómo continuas
- Se: pues ya está, ahora tienes una probabilidad entre muchos colores de que sea blanca o de otro color
- 3.3: entonces aquí es un 25% de que fuera negra o blanca la bola, no?
- Se: no, o qué? J?
- J: no ho sé, ho estic pensant
- 3.1: yo creo que de que la otra bola sea blanca, hay un 66,6%
- 3.3: o un 25%...que sea blanca o negra
- 3.1: porque hay tres posibilidades, tres posibilidades
- Se: no
- 3.1: sí, una que te salga...la que ya ha salido es blanca, o sea, que tienes otra dentro. Entonces puede ser o que sea la blanca, o la que ya has metido,
- 3.1: o que sea la otra blanca que
- Se: o que sea la otra que acabas de meter
- 3.1: o que se la otra blanca o que sea la otra que es de color
- Se: vale, vale
- 3.1: hay tres posibilidades
- J: bueno, escriu, escriu i...

- 3.1: a ver, 'has sacado una bola blanca que no sabes si es la que tú has metido o lo que ya estaba dentro
- Se: auauauaua, pero vaya paranoia entonces...
- 3.1: entonces puede ser que la bola que haya dentro, o sea, aquí una bola fuera, una mesa
- 3.1: una bola fuera...blanca...
- Se: pero esto está mal, en verdad esto no existe. La bola blanca2 no existe, porque puede ser que sea blanca o puede ser que sea de otro color...es lo mismo, lo entiendes?
- 3.1: escúchame
- Se: nonono, explícamelo
- 3.3: Sergi!
- 3.2: explícamelo...vaa
- 3.2: eh, 3.1, lo entiendes lo que te quiero decir? Eh 3.1?
- 3.2: corre, corre, míralo!
- Se: que está haciendo?
- 3.1: es mi planteamiento, si yo tenía razón, es que soy el p*** amo [NT estan mirant com en J està resolvent el problema via Bayes]
- 3.1: no sé qué hago aquí, pero me tengo que ir a clase de superdotados pero ya!
- 3.2: eh, me estás escuchando? La bola blanca 1, esta es la que has metido, puede ser...
- 3.5: en verdad hay dos posibilidades
- 3.2: sólo hay dos, puede ser la bola blanca que acabas de meter o puede ser la otra bola que es de cualquier color que ya incluye el blanco, entiendes?
- 3.5: puede ser un 25%,
- 3.1: puede ser, o bien la bola 1 o bien la bola 2, la que está dentro puede ser...hay dos posibilidades, o que sea la bola que tú has metido, o la otra. Si es la que tú has metido, es blanca seguro, si no, hay dos posibilidades...
- 3.1: claro, claro, claro, claro
- 3.1: escucha: hay dos bolas, no? Dos bolas...
- 3.2: claro, claro [NT fa una mica de mofa]
- 3.1: hay una bola dentro, puede ser la bola 1 que tú has metido, o puede ser la bola 2, ya estaba dentro. Entonces, aquí está el motor del grupo. Si es esta bola 1, es blanca, seguro. Y si es, esta, puede ser o bien blanca u otro color: entonces, hay tres posibilidades.
- Se: sí, planteándolo así, sí que lo veo.
- Se: es lo que te iba a decir, pero...
- 3.1: cómo se llama, Marina? [NT criden a la Marina]
- 3.1: hay tres posibilidades...
- Ma: cómo? Explícame algo?
- 3.1: aquí ya ha pasado la segunda parte del problema, que ya has sacado una bola, ya la has sacado...
- Ma: sólo queda una bola dentro
- 3.1: ...que resulta que es blanca, la que has sacado. Y la que hay dentro, no sabes cuál es. Puede ser o bien, la bola que tú has metido o bien la bola

que te han metido antes de empezar el problema ya estaba en la bolsa.
Entiendes?

- 3.1: si es la bola que tú has metido es blanca seguro, pero si es la que ya estaba metida, puede ser o blanca o de color
- S: puedes decir si sí o si no...
- Ma: això esteu tots d'acord? Amb aquest raonament?
- 3.1: hombre, yo seguro
- Ma: el del 75%, también?
- 3.5: eh?
- Ma: el que creía que era un 75%
- 3.1: también lo veo, también. Porque según...
- 3.2: yo lo que pensaba es que el otro color también incluye el ser blanco, no?
- Ma: ...ser blanco, entonces no puedes separarlos, no?
- 3.2: claro, porque es como decir...rojo y otro color, qué sentido tiene?
[NT arribo jo, m'ho raonen]
- 3.1: hemos llegado a la conclusión
- Se: a la conclusión...
- 3.2: bua, otra vez, esto se va a rallar más...
- 3.1: tú ya has sacado una bola, la tienes en la mano y es blanca, entonces queda una bola dentro. Y puede ser que sea la bola que tú has metido o la que ya estaba dentro. Si es la que tú has metido, seguro que es blanca, pero si es la que ya estaba dentro puede ser o blanca o de color.
- Se: vale , por lo tanto?
- 3.1: hay tres posibilidades, entonces es un 33,33% cada posibilidad, que si sumas las que es blancas, es un 66,6%
- Se: estáis de acuerdo? Vale pues redactarlo y ya está
- Se: os tengo que decir una cosa, yo no lo sé hacer aún...
- 3.1: pero te parece bien este planteamiento...?
- Se: a mí me parece muy lógico, también me han convencido aquellos que tienen otro planteamiento, o aquellos que tiene otra cosa...os parece lógico este planteamiento?
- 3.1: pero no nos pondrás mala nota si está mal...?
- Se: hombre, si no me explicas nada...sí.
[NT un temps passa, li ensenya la redacció]
- 3.1: mira te parece bien esto?
- 3.2: sí es lo que te proponía antes

D. EPISODI 4: ELS ANIVERSARIS

- Marina: A veure...per on anem? Què hem fet fins ara?
- 4.1: Les possibilitats totals que hi ha.
- 4.2: De que sortissin tres.
- Marina: Com ho heu fet amb tres?
- 4.3: Dóna'm (el paper)
- [NT S'estan una estona mirant tots el paper. Estan fets un embolic]
- Marina: Fem una cosa: fem-ho per parts. Aquestes són les possibilitats totals?
- Tots: Si
- Marina: Estem tots d'acord. Anem a veure les possibilitats favorables. Fem només quan tenim dues persones...Quina es la probabilitat que les dues neixin el mateix dia. Ara, quan tenim tres quina es la probabilitat de que almenys dos neixin el mateix dia. Feu només aquests dos. Amb dues persones i amb tres.
- 4.2: Això, no? Amb tres, vam quedar..
- Marina: Què m'heu fet amb tres?
- 4.2: De que dues neixin el mateix dia, la primera i la segona el mateix dia i la tercera en dia diferent, la segona i la tercera el mateix dia, i l'altre en dia diferent, la primera i la tercera el mateix dia i la del mig en dia diferent, i que els tres neixin el mateix dia. Com que l'any té 365 dies podem ser 365 cops les possibilitats.
- Marina: Vale... us en recordeu del complementari que a vegades ens ajudava? Doncs ara proveu amb el complementari, es a dir, la probabilitat amb tres persones de que no hi hagi dos que almenys neixin el mateix dia.
- 4.2: Això era que neixin els tres en dies diferents...a restar, a restar nois.
- Marina: Però intenteu fer-ho amb càlculs. Con ho vam fer amb els daus.
- 4.3: Vam restar 100 menys això.
- [NT Ve un alumne i els distreu agafant coses dels estoigs. S'estan uns minuts discutint]
- Marina: Insisteixo que amb tres persones em calculeu la probabilitat de que neixin tots en dia diferents. Però no ho feu restant. D'una altra manera.
- 4.2: Collons...Llavors si no t'ho fem restant...com?
- Marina: Penseu-hi.
- 4.4: Era allò de 365 per 364 per 363.
- 4.2: Ho hem fet això, no?
- 4.4: No.
- 4.2: Collons..
- 4.4: Entre 365 per 365 per 365.
- 4.2: Com?
- 4.4: 363 per 364 per 363
- 4.2: Si
- 4.4: Entre 365
- 4.3: Noooo

- 4.4: Per què no? A veure...per exemple, el primer és el 1 de gener. El segon no pot ser l'1 de gener. Pot ser 364 menys l'1 de gener. Perquè no siguin iguals...
- 4.2: No se...no se...Donaria un número massa petit en teoria.
- 4.3: 4.2, et dóna aquest en total.
- 4.2: Ostres, espera, espera..
- 4.4: Si aquest es el total fas 1 menys...
[NT Torna a venir l'alumne per a demanar uns informes. L'4.1 i el 4.3 es distreuen.]
- 4.2: Entre 365?
- 4.4: entre 365 per 365 per 365.
- 4.2: No, espera... (una estona pensant) Es que et dona 1,7 per 10 a la 10.
- 4.4: això es com ho vam fer nosaltres.
- [NT L'alumne continua interrompin a la meitat del grup]
- 4.2: 0,99. 4.3! Para de fer el gilipolles i pensa!
- 4.3: Estic pensant! Però no se com es fa.
- 4.2: 0,99 què?
- 4.4: Què? Què vols que et digui jo?
- 4.3: L'altre quant donava?
- 4.1: Però una cosa! És el que ha dit el 4.4, no? 365 per 364 per 363...i una altre vegada comencem, no? Perquè posa 364 aquí? Hauria de ser 365 por 364 por 363. Després 365. Oi que si?
- 4.4: Pensa que els dies es van acabant. Llavors hem de restar una dia. Del total els hi has d'anar restant.
- 4.2: Potser ho has dit bé i tot...
- 4.4: Es que és el que vam fer nosaltres.
- 4.2: Doncs res...apunta!
- 4.4: El què?
- 4.2: Ostia puta 4.4! Si ho has dit!!!!
- 4.4: Això?
- 4.2: Arggggggggg!!!!
- 4.4: Joooo. Es que no se que he dit, 4.2!!
- 4.1: Apunta!! Qui apunta???
- 4.2: Calla, que no saps del que va la cosa.
- 4.4: Jo només he dit el que vam fer nosaltres.
- 4.2: Que mal escribes...
- 4.4: Tu calla...(passa una estona). Ja està.
- 4.2: Bien!! Lo tenemos!!
- 4.3: Sí??
- 4.2: En verdad tenemos algo...
- 4.3: Fem un crit o algu...
- 4.1: Sí! Lo hemos conseguido...
- 4.3 & 4.1: Ueeeeeeeeeeeeee!!
- 4.2: Sergi! Mmmm...cridem algú...
[NT Mentrestant torna en Jonathan i es dedica a tocar el mòbil i intentar desbloquejar-lo amb en 4.3 i l'4.1. Discuteixen entre tots una mica perquè creuen que han bloquejat el telèfon i es tornen a posar a treballar]
- 4.2: Això serien tres persones, no?

- 4.4: Si.
- 4.3: Lo de superiors i quan ha de ser no sabem que és.
- 4.2: A veure...això t'ha de donar...
- 4.4: 50
- 4.2: No, menys de 50, so burro..
- 4.4: Per?
- 4.2: Perquè estem fent els que no són iguals.
- 4.4: Vale si..
- 4.1: Nooo..Los que són iguales ha dicho que hagamos...
- 4.2: Però es que aquí estem fent els que no són iguals..Per tant t'ha de donar 49 coma i pico...
- 4.1: Llavors els que queden que són, iguals?
- 4.2: Es tracta de fer-ho com nosaltres sabem: hem d'anar provant.
- 4.4: Fica 20 persones. Ves restant-li un i ho trobarem.
- 4.1: Què posa? Què posa?
- 4.3: Calla.
- 4.2: Òstia! Un any quants dies té? 365 no?
- 4.4: si.
- 4.2: Es que m'he equivocat dividint..
- 4.3: Però tot i així estàs amb 365..
- 4.2: Ah..si si..Sóc gilipolles..
- [NT Xerren sobre l'entrega dels exercicis d'ètica]
- 4.2: Ostia chavales, tenemos un problema...
- 4.1: Dime houston..
- 4.2: No podem...s'acaben els números a la calculadora..
- 4.4: Bueno..doncs fes igual i continua pensant..
- [NT passa una estona. Arriba la Marina]
- Marina: Aquesta és la probabilitat de que...?
- 4.1: Aquesta és la probabilitat de que no.
- 4.4: És la probabilitat de que tots siguin diferents.
- Marina: De que tots siguin diferents?
- 4.2: Si.
- Marina: Amb quantes persones?
- 4.3 & 4.1: Tres.
- Marina: Vale..doncs ara fem-ho amb quatre...
- 4.2: Mmmm..Jo ho estic fent amb unes quantes més...
- 4.1: Elevado a cuatro, no?
- 4.4: Claroo...
- 4.2: Ho estem fent fins a 349.
- Marina: esteu fent moltes més?
- 4.2: Moltes més? Ostres què hem fet? Està malament?
- Marina: Pregunto...
- 4.2: Per 10 a la 36 crec que ens hem passat..no? Ai...
- 4.1: Pues elévalo, que es lo mismo.
- 4.2: Però no estic multiplicant el mateix número
- 4.1: Vale, vale..
- 4.2: A mi alguna cosa no em dóna..
- Marina: Només ens falta una cosa.

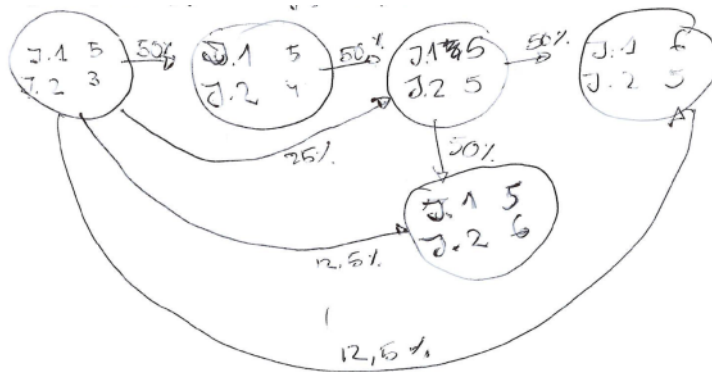
- 4.2: Profe...això no hem surt...eh? 359...
- Marina: Aquest quant us surt?
- 4.2: 99,1 de que sigui diferent.
- Marina: Vale..quin procediment us a resultat més fàcil? Aquest o aquest?
- 4.2: Aquest.
- Marina: I podem arribar a trobar l'altre?
- 4.2: Si...no?
- Marina: Tenint aquest càlculs puc arribar a trobar la probabilitat de que almenys dos neixin el mateix dia?
- 4.1: Potser...
- 4.2: Si...fas 1 menys això. 100 menys 99.1
- Marina: I m'ho podríeu anar ampliant?
- 4.1: Si..es lo que has dicho (al 4.2)
- 4.2: 4.4...fes-ho tu...
[NT La Marina marxa. Passa una estona]
- 4.2: A no! És elevat a quatre!
- 4.4: Quin estàs fent? Quatre persones? Si, és elevat a quatre.
- 4.2: Ostia! Ja sé perquè m'he equivocat...
- 4.4: Claar..aquí afegeixes una persona més..afegeixes un any més.
- 4.2: 4.4, fes!
- 4.4:entre 365 elevat al quadrat.. cero coma nou...tenim un 9,83% de que siguin tots tres diferents.
- 4.2: 98,3
- 4.4: Si.
- 4.2: Ah, vale.. Vinga va! Fotem-li! 4.4 ara fem-ho per exemple amb 10.
- 4.4: Amb 10?
- 4.2: Amb 10. Es que sinó ens morirem...
- 4.4: I com seria amb 10?
- 4.2: Amb 10! Deixa-li al 4.3 que ho sap fer..
- 4.4: Espera, espera...
- [NT Va fent càlculs]
- 4.3: Perquè elevat a 10?
- 4.4: Perquè són deu persones..88,3%
- 4.2: Ens morirem...
- 4.4: Per 150
- 4.2: Perquè? Es que no podem..no dona la calculadora...Quant era amb 10? 88 coma..
- 4.4: 30..
- 4.3: amb 17..(fa càlculs). Un 68%
- 4.2: això seria impossible, no? Si amb 10 persones surt 88, amb 17, 68? Un 20%?
- 4.3: Perquè? Poden haver més possibilitats, amb més persones més fàcil!
- 4.2: Però si...
- 4.4: És el que ens ha donat...
- 4.2: Es que si amb vuit hem baixat un 10%...
- 4.4: Si però hi ha més gent, per tant hi ha més probabilitats de que la gent neixi el mateix dia
- 4.3: Ah, vale. Això és que no..Llavors si que està bé.

- 4.2: Amb 17 quant?
- 4.3 & 4.4: 68,5
- 4.2: Vale..aneu fent..
- 4.4: i ara amb 20?
- 4.3: 20?
- 4.2: Amb 20 no...posa amb 23 que és un número màgic.
- 4.4: Però llavors serà massa..Ah, vale. Seria inferior a 50...Llavors jo crec, tal i com va el ritme que amb 19
[NT Comencen a fer càlculs]
- 4.4: Un 58%. Amb 20 persones un 58,86%. Llavors ara seran 22..
- 4.3: No amb 21 ja estarà.
- 4.2: 23, 23...bueno...no...22
[NT segueixen fent càlculs. L' 4.1 es troba fora de la classe]
- 4.3 & 4.4: Amb 22 surt 52 coma..
- 4.4: 52,43
- 4.2: Amb 23...A no...amb 22. Era el 23, és un número màgic. Està a la gravació i ho he dit abans.
[NT en 4.3 i en 4.4 tornen a calcular]
- 4.3: 49,27
- 4.2: Siii! 49,3 que això es un 51,7% no?
- 4.4: Si..
- 4.2: No..un 50. Ueee!
- 4.4: Sabeu que casi tot ho he pensat jo?
- 4.2: Ehmmm...no!
- 4.4: Si, si..Però he pensat això i hem resolt això...
- 4.3: és veritat..
- 4.2: Però has mentit..diu: “casi tot ho he pensat jo” .
- 4.4: Sí..
- 4.2: Molt bé, doncs...Senyor que pensa...si preguntem quantes persones a més de tu mateix han d' estar a una habitació per tal de trobar amb una probabilitat superior al 50% algú que tingui el mateix aniversari que tu, la resposta seria igual que en el cas anterior?
- 4.4: Eeeeeiiiiimm....Que sigui superior al 50%? 23 persones igual.
- 4.2: Segur?
- 4.4: Si
- 4.2: Per què?
- 4.4: Perquè aquí tens les que serien diferents. Aquí serien les que siguin iguals..Té la mateixa probabilitat això que això...És la mateixa pregunta. Una habitació i una habitació.
- 4.2: Què dius? Que estàs dient?
- 4.4: Que si...és la mateixa
- 4.2: Que va...A més de tu mateix, amb probabilitat superior al 50%, algú que tingui el mateix aniversari que tu. Poden haver nascut tots l' 1 de juliol i tu el 6 d' octubre..Esto se ha puesto chungo...
- 4.4: Marina, hem fet el 50% del problema...
- 4.2: 23 persones.
-

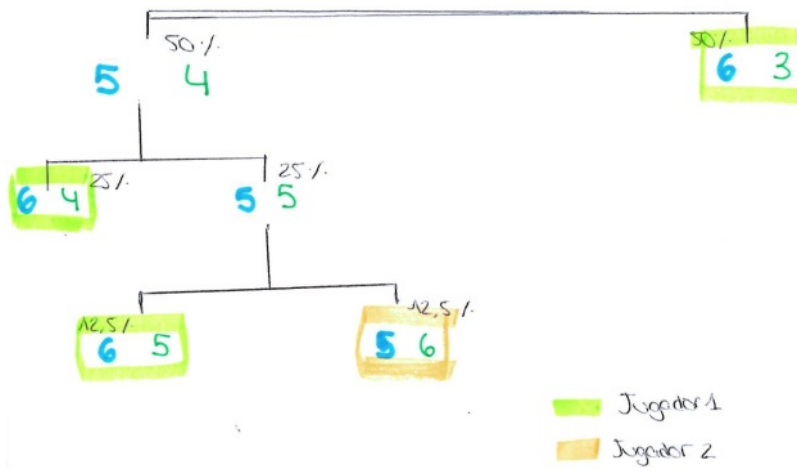
- Marina: Con ho hem fet?
- 4.2: Hem anat provant...
- Jordi: 23 amb quants alumnes? A no, no..amb 23 persones ja tens més del 50%?
- 4.2: Si
- Jordi: Si..em sembla que amb 30 estava sobre dos terceres parts..No se el número exacte, però si, esta per aquí...
- Marina: Aneu a la segona part
- Jordi: Però això està raonat, 4.2?Jo es que veig aquí simplement els resultats. Ah, vale, vale...veig el raonament aquí..Ara la dificultat és explicar d' on treus això. Si heu de fer una exposició oral heu de convèncer els vostres companys de que el vostre argument es correcte. I teniu algun company una mica cazurro...així que jo us recomanaria pensar bé com ho expliqueu..
- 4.2: Aquests no són el problema..precisament seran els llestos els que no ho entendran...

Representacions en Probabilitat

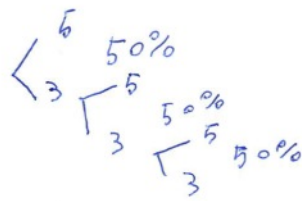
Diagrama d'estats



En forma d'organigrama



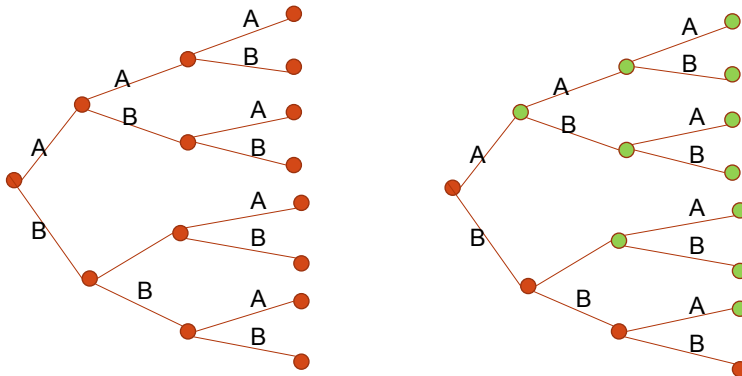
El més econòmic



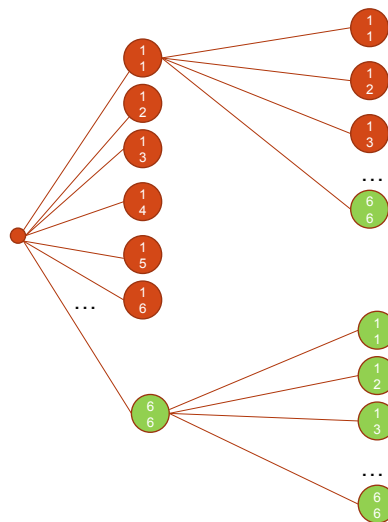
$$50\% = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 12,5\%$$

Jugador A (5) – Jugador B (3)

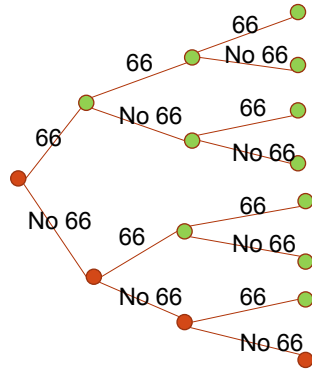


El problema dels daus. El caos.

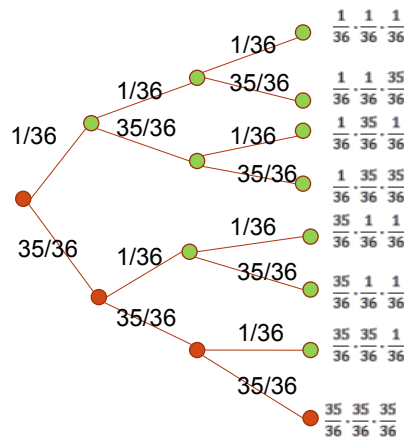


“Jo si no faig les 36 possibilitats no ho veig clar”

El mateix esquema que els anteriors?



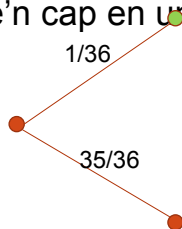
Sí, però ara cada branca té un pes diferent.



Quan tiro els daus, puc treure un doble sis o no treure'l, no?

$$P(\text{treure algun sis}) + P(\text{no treure'n cap}) = 1$$

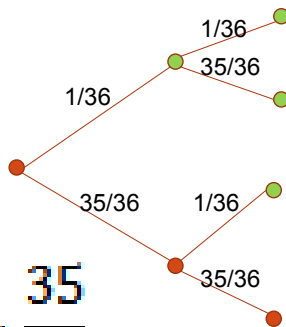
$$P(\text{no treure'n cap en una tirada}) = 35/36$$



$$\frac{1}{36} + \frac{35}{36} = 1$$

$$P(\text{treure 66}) + P(\text{no treure 66}) = 1$$

$$P(\text{no treure'n cap a la segona}) = 35/36 \cdot 35/36$$



$$1 - \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36}$$